Exercices 15 — Ensembles finis, groupe symétrique

Dénombrement

Exercice 1. — Un jeu de cartes “standard” est constitué de 52 cartes, réparties en quatre couleurs (Pique, Coeur, Carreau, Trèfle).
Dans chaque couleur, on trouve donc 13 cartes dont les “valeurs” sont : 2 – 3 – 4 – 5 – 6 – 7 – 8 – 9 – 10 – Valet – Dame – Roi – As.

Une **main** est une combinaison de 5 cartes d’un tel jeu.

1) Combien existe t-il de mains différentes ?

2) Quelle est la probabilité d’avoir une *couleur* (5 cartes de la même couleur) ?

3) Quelle est la probabilité d’avoir un *carré* (une main contenant 4 cartes de la même valeur) ?

4) Quelle est la probabilité d’avoir une *quinte flush* (5 cartes de la même couleur, et de valeurs consécutives) ?

5) Quelle est la probabilité d’avoir un *brelan* (une main contenant 3 cartes de la même valeur) ?

Exercice 2. — Soient E et F deux ensembles, et soient A et B deux parties de E et F respectivement. Etant donnée une application $f : E \longrightarrow F$, est-il vrai que :

1) si A est une partie finie de E alors $f(A)$ est une partie finie de F ?

2) si $f(A)$ est une partie finie de F, alors A est une partie finie de E ?

3) si B est une partie finie de F alors $f^{-1}(B)$ est une partie finie de E ?

4) si $f^{-1}(B)$ est une partie finie de E alors B est une partie finie de F ?

Exercice 3. — Quel est le coefficient de $a^3b^5c^2$ dans le développement de $(a+b+c)^{10}$?

Exercice 4. — Soient E un ensemble fini de cardinal n, et A une partie de E de cardinal p. Combien existe t-il de parties de E contenant A ?

Exercice 5. — Soit E un ensemble fini de cardinal n. Calculer : $S = \displaystyle\sum_{X \subset E} \mathrm{Card}(X)$

Exercice 6. — Soient n et p deux entiers naturels, avec $n \leqslant p$. Combien existe t-il d’applications strictement croissantes de $\mathbb{N}_n$ dans $\mathbb{N}_p$?

Exercice 7. — On trace dans le plan n droites *en position générale* (c’est à dire deux à deux non parallèles, et trois à trois non concourantes). Combien forme t-on ainsi de triangles ?

Groupe symétrique

Exercice 8. — Dans cet exercice, on se place dans S_6.

1) Quel est l'inverse du 4-cycle (1354) ?
2) Vérifier que $\sigma = (14)(43)$ est un 3-cycle. En est-il de même pour $\rho = (43)(14)$?

Exercice 9. — Dans cet exercice, on se place dans S_7. On considère la permutation :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & 7 & 1 & 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

1) Ecrire σ comme un produit de cycles disjoints. En déduire la signature de σ.
2) Déterminer le plus petit entier naturel N non nul tel que $\sigma^N = \mathrm{id}_{\mathbb{N}_7}$

Exercice 10. — A propos de S_3.

1) Décrire les éléments de S_3.
2) On note ρ le 3-cycle (132). On sait * que $G(\rho) = \left\{\rho^k \ / \ k \in \mathbb{N}\right\}$ est un sous-groupe de S_3. Décrire $G(\rho)$.
3) On note 1, 2 et 3 les sommets d'un triangle équilatéral. Comment les éléments de S_3 agissent-ils sur les sommets de ce triangle ?

Exercice 11. — Supports. Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
Soit $\sigma \in S_n$. On appelle **support** de σ l'ensemble : $\mathrm{supp}\,(\sigma) = \{i \in \mathbb{N}_n, \ \sigma(i) \neq i\}$.

1) Que vaut $\mathrm{supp}\,(\sigma)$ pour $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 6 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$?
2) Soit $\sigma \in S_n$. Montrer que si $i \in \mathrm{supp}\,(\sigma)$, alors $\sigma(i) \in \mathrm{supp}\,(\sigma)$.
3) Montrer que deux permutations σ et τ à supports disjoints commutent.

Exercice 12. — Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

1) Soient i et j deux entiers distincts dans $[\![2, n]\!]$. Calculer : $\rho = (1i)(1j)(1i)$.
2) Montrer que les transpositions de la forme $(1i)$ avec $i \in [\![2, n]\!]$ engendrent S_n.

Exercice 13. — Classes de conjugaison dans S_n. Dans cet exercice, n désigne encore un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Soient σ et σ' deux permutations de S_n. On dit que σ' est **conjuguée** à σ s'il existe une permutation $\tau \in S_n$ telle que : $\boxed{\sigma' = \tau^{-1}\sigma\tau}$.

1) Montrer que la relation de conjugaison (définie ci-dessus) est une relation d'équivalence sur S_n.
   Par la suite, on pourra donc dire que σ et σ' sont conjuguées lorsque σ' est conjuguée à σ ou σ est conjuguée à σ' ; on pourra le noter $\sigma' \sim \sigma$.
2) Quelles sont les permutations conjuguées à l'identité ?
3) Soit σ une permutation de S_n, et soit $m \in [\![2, n]\!]$. Montrer que :

$$\sigma\,(12 \cdots m)\,\sigma^{-1} = (\sigma(1)\sigma(2) \cdots \sigma(m))$$

4) En déduire que deux cycles sont conjugués si et seulement si leurs longueurs sont égales.

∗. C'est d'ailleurs une question du DM