Problème de la semaine 8

Exercice 1 — Matrices

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} -7 & 4 & -32 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 9 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ dans $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$.

1/ Montrer que la matrice P est inversible, et déterminer P^{-1}.[∗]

2/ On pose $T = P^{-1}AP$. Calculer T *(on vérifiera que T est triangulaire supérieure)*.

3/ Calculer T^n pour tout entier naturel n.

4/ Etablir que : $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = \mathrm{I}_3 + B_n$, où B_n est une matrice de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ que l'on précisera.

Remarque - Vérifier vos calculs avec numpy. Dans la bibliothèque numpy de Python, de nombreuses fonctions sur les matrices sont déjà programmées. En particulier, il existe une fonction calculant l'inverse d'une matrice (inversible…), qui s'appelle poétiquement "np.linalg.inv()". Voilà par exemple comment procéder pour inverser la matrice $D = \mathrm{diag}(1, 2, 4)$ (ça fonctionne aussi pour d'autres matrices !).

Dans le shell, on écrit :

```
>>>import numpy as np

>>>D=np.array([[1,0,0],[0,2,0],[0,0,4]]) # définition de D

>>>D # juste pour vérifier
array([[1, 0, 0],
       [0, 2, 0],
       [0, 0, 4]])

>>>np.linalg.inv(D) # calcul de l'inverse
array([[1.  , 0.  , 0.  ],
       [0.  , 0.5 , 0.  ],
       [0.  , 0.  , 0.25]])
```

Exercice 2 — Une fonction définie sur $\mathbb{R}$, nulle part continue

On définit une fonction appelée **fonction indicatrice des rationnels**, notée $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$, en associant la valeur 1 à tout rationnel, et la valeur 0 à tout irrationnel. Plus formellement :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}$$

1/ Dans cette question, x désigne un nombre rationnel. On **admet** par ailleurs que π est irrationnel[†].

a/ Etablir que : $\forall n \in \mathbb{N},\ x + \dfrac{\pi}{2^n} \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

∗. Indications : P^{-1} est à coefficients entiers, et le coefficient situé à la première ligne troisième colonne vaut -21.

†. C'est bon, on l'a déjà prouvé dans le CB1 !

b/ Justifier brièvement que la suite de terme général $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}\left(x+\dfrac{\pi}{2^n}\right)$ est convergente, et préciser sa limite.

c/ Déduire de ce qui précède que la fonction $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ n'est pas continue en x.

2/ Etablir que la fonction $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ n'est continue en aucun réel x.

Exercice 3 — **Equation fonctionnelle** On souhaite déterminer l'ensemble des fonctions f définies sur $\mathbb{R}_+^*$ et à valeurs réelles telles que :

$$\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*,\quad f\,(xy)=f\,(x)+f\,(y)\qquad\textbf{(E)}$$

1/ Questions préliminaires. Soit $f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}_+^*}$ solution de **(E)**.

a/ Etablir que : $f(1)=0$.

b/ Etablir par récurrence sur n que : $\forall\,n\in\mathbb{N}^*,\ \forall\,(x_1,\dots,x_n)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^n,\ f\left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n}x_k\right)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}f\,(x_k).$

c/ Etablir que : $\forall\,x\in\mathbb{R}_+^*,\ f\left(\dfrac{1}{x}\right)=-f(x).$

➤ **Partie 1 - Solutions de classe $\mathscr{C}^1$.**

Dans cette partie, on suppose que f est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et à valeurs réelles solution de (E).

2/ Soit x un réel strictement positif. Etablir que : $f'(x)=\dfrac{f'(1)}{x}.$

3/ En déduire soigneusement l'ensemble des fonctions de $\mathscr{C}^1\left(\mathbb{R}_+^*,\mathbb{R}\right)$ solutions de **(E)**.

➤ **Partie 2 - Solutions de classe $\mathscr{C}^0$.**

Dans cette partie, on suppose seulement que f est une fonction de classe $\mathscr{C}^0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et à valeurs réelles solution de (E). ‡

4/ Etablir que : $\forall\,x\in\mathbb{R}_+^*,\ \forall\,n\in\mathbb{N},\ f\,(x^n)=nf(x).$

5/ Etablir que : $\forall\,x\in\mathbb{R}_+^*,\ \forall\,n\in\mathbb{Z},\ f\,(x^n)=nf(x).$

6/ Etablir que : $\forall\,q\in\mathbb{N}^*,\ f\left(\mathrm{e}^{1/q}\right)=\dfrac{1}{q}\,f(\mathrm{e}).$

7/ Etablir que : $\forall\,r\in\mathbb{Q},\ f\,(\mathrm{e}^r)=r\,f(\mathrm{e}).$

8/ En déduire finalement que : $\forall\,x\in\mathbb{R},\ f\,(\mathrm{e}^x)=x\,f(\mathrm{e}).$

9/ Montrer que si f et g sont deux solutions continues de **(E)** sur $\mathbb{R}_+^*$, alors elle sont proportionnelles. §

10/ En déduire soigneusement l'ensemble des fonctions de $\mathscr{C}^0\left(\mathbb{R}_+^*,\mathbb{R}\right)$ solutions de **(E)**.

‡. Quitte à insister lourdement, cela signifie qu'il est rigoureusement interdit d'utiliser la dérivée de f, dont rien n'assure l'existence.

§. C'est à dire qu'il existe un réel λ tel que $f=\lambda g$, ou $g=\lambda f$.