

COLLE 16 – QUESTIONS DE COURS

QUESTION DE COURS N⁰1 — **Propriété.** Soient A et B deux parties d'un même ensemble fini E .

Alors : $\text{Card}(E \setminus A) = \text{Card}(E) - \text{Card}(A)$, et $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$

Observons que : $E = (E \setminus A) \cup A$. Cette union étant disjointe, on a : $\text{Card}(E) = \text{Card}(E \setminus A) + \text{Card}(A)$. On en déduit la première égalité.

Dans le même registre : $A \cup B = (A \setminus B) \cup B$.

Cette union étant disjointe, on a : $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A \setminus B) + \text{Card}(B)$ (♠).

Par ailleurs : $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$.

Cette nouvelle union étant disjointe, on a : $\text{Card}(A) = \text{Card}(A \setminus B) + \text{Card}(A \cap B)$.

Par suite : $\text{Card}(A \setminus B) = \text{Card}(A) - \text{Card}(A \cap B)$ (♣).

D'après (♠) et (♣) : $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$.

QUESTION DE COURS N⁰2 — **Propriété.** Soient E et F deux ensembles finis, et $f : E \rightarrow F$ une application. On suppose **Card** (E) = **Card** (F). LASSE (les assertions suivantes sont équivalentes) :

1/ f est bijective 2/ f est injective 3/ f est surjective

Montrons $1) \implies 2) \implies 3) \implies 1)$; la boucle sera ainsi bouclée !

Supposons E et F finis de même cardinal $n \in \mathbb{N}^*$.

• $1) \implies 2)$: trivial.

• $2) \implies 3)$: supposons f injective. On peut commencer par noter que $f(E)$ est une partie de F . En outre, puisque f est injective, $f(E)$ est un ensemble fini, de cardinal égal à celui de E (cours). Or $\text{Card}(E) = \text{Card}(F)$ (par hypothèse). Donc l'ensemble $f(E)$ est une partie de F , de cardinal égal à celui de F ; il s'ensuit que $f(E) = F$ (cours). Donc f est surjective, ce qui prouve l'implication.

• $3) \implies 1)$: supposons à présent f surjective. Alors $f(E) = F$, donc $\text{Card}(f(E)) = \text{Card}(F)$, et par conséquent $\text{Card}(f(E)) = \text{Card}(E)$ (puisque $\text{Card}(E) = \text{Card}(F)$ par hypothèse). On en déduit (cours) que f est injective, et donc bijective. Ce qui prouve l'implication, et achève la preuve de la propriété.

QUESTION DE COURS N⁰3 — **Théorème.** Si E est un ensemble fini de cardinal n , alors $(S_E, \circ)$ est un groupe fini de cardinal $n!$.

Un élément de S_E est une bijection de E dans E . En vertu de la question de cours 2, il existe autant de bijections de E dans E que d'injections de E dans E (puisque E est fini). Or le nombre d'injections de E dans E est : $\frac{n!}{(n-n)!} = n!$.*

Par suite, il existe $n!$ bijections de E dans E , ce qui assure déjà que : $\text{Card}(S_E) = n!$

En outre, la loi de composition (“ $\circ$ ”) est une *loi de composition interne* dans S_E (la composée de deux bijections est une bijection). Cette loi est *associative* car plus généralement la composition des applications l'est. Elle possède un *élément neutre* qui est l'identité de E . Enfin, tout élément f de S_E est *inversible* (pour la loi “ $\circ$ ”) dans S_E , car si f est bijective de E dans E , sa réciproque f^{-1} est elle aussi une bijection de E dans E .

Ce qui prouve que $(S_E, \circ)$ est un groupe, de cardinal $n!$.

QUESTION DE COURS N⁰4 — **Propriété.** Pour tout entier $n \geq 3$, le groupe $(S_n, \circ)$ est non-abélien.

Soit n un entier ≥ 3 . Les transpositions (12) et (13) appartiennent à S_n , puisque $n \geq 3$...

Il reste à observer que (12)(13) = (132) tandis que (13)(12) = (123) pour conclure.

Conclusion. Pour tout entier $n \geq 3$, le groupe $(S_n, \circ)$ est non-abélien.

Remarque : de fait, le groupe $(S_n, \circ)$ est abélien SSI $n < 3$, d'après ce qui précède, et car les groupes S_1 (groupe trivial) et $S_2 = \{\text{id}, (12)\}$ sont commutatifs.

*. Plus généralement, le nombre d'applications injectives de E dans F est $\frac{n!}{(n-p)!}$ si $\text{Card}(E) = p \leq n = \text{Card}(F)$.

QUESTION DE COURS N°5 — **Propriété.** Deux permutations à supports disjoints commutent.

► On commence par prouver que si un entier k appartient au support d'une permutation σ , alors $\sigma(k)$ appartient également au support de σ .

Considérons donc un entier $k \in \text{supp}(\sigma)$. Par l'absurde, supposons que $\sigma(k)$ n'appartienne pas au support de σ . Alors :

$$\sigma(\sigma(k)) = \sigma(k) \text{ d'où } (\sigma \text{ étant injective}) : \sigma(k) = k$$

Ce qui contredit l'hypothèse " $k \in \text{supp}(\sigma)$ ". Donc $\sigma(k) \in \text{supp}(\sigma)$.

En résumé : $\forall \sigma \in S_n, \forall k \in \mathbb{N}_n, [k \in \text{supp}(\sigma)] \implies [\sigma(k) \in \text{supp}(\sigma)]$ (♠)

► La preuve du lemme est à présent une formalité. Soient φ et ρ deux éléments de S_n , à supports disjoints.

Soit k un entier de $\mathbb{N}_n$. Puisque $\text{supp}(\varphi) \cap \text{supp}(\rho) = \emptyset$ (♣), on peut distinguer 3 cas :

➤ *Premier cas* : $k \in \text{supp}(\varphi)$. Alors on a : $k \notin \text{supp}(\rho)$ (selon (♣)), et $\varphi(k) \in \text{supp}(\varphi)$ (selon (♠)), donc $\varphi(k) \notin \text{supp}(\rho)$ (re-♣).

On en déduit que : $\varphi(\rho(k)) = \varphi(k)$ et $\rho(\varphi(k)) = \varphi(k)$. Donc : $\varphi(\rho(k)) = \rho(\varphi(k))$.

➤ *Second cas* : $k \in \text{supp}(\rho)$. D'après le premier cas : $\varphi(\rho(k)) = \rho(\varphi(k))$.

➤ *Troisième cas* : $k \notin (\text{supp}(\rho) \cup \text{supp}(\varphi))$. Alors : $\varphi(\rho(k)) = \rho(\varphi(k)) = k$.

➤ *Conclusion* : $\forall k \in \mathbb{N}_n, \varphi(\rho(k)) = \rho(\varphi(k)) = k$. Ainsi : $\varphi \circ \rho = \rho \circ \varphi$.

Conclusion. Deux permutations à supports disjoints commutent.

BANQUE D'EXERCICES

EXERCICE 1. — Soit E fini de cardinal n . Etablir que $\text{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n$.

EXERCICE 2. — Soient n et p deux entiers naturels, avec $p \leq n$. Combien existe-t-il d'applications $f : \mathbb{N}_p \longrightarrow \mathbb{N}_n$ strictement croissantes ?

EXERCICE 3. — Dans S_5 , combien existe-t-il de transpositions ?

EXERCICE 4. — Dans S_5 , combien existe-t-il de 3-cycles ?

EXERCICE 5. — Dans S_5 , combien existe-t-il de produits de 2 transpositions à supports disjoints ?

EXERCICE 6. — Soit n un entier ≥ 2 . On considère :

$$H = \{\sigma \in S_n, \sigma(1) = 1\}$$

H est donc l'ensemble des permutations de $\mathbb{N}_n$ laissant 1 invariant.

Montrer que H est un sous-groupe de S_n . Quel est son cardinal ?

EXERCICE 7. — Soit n un entier ≥ 2 . Combien existe-t-il d'éléments de S_n qui échangent 1 et 2 ?

EXERCICE 8. — Dans S_8 on considère le 6-cycle $c_1 = (135246)$ et le 3-cycle $c_2 = (154)$.

Existe-t-il un élément σ de S_8 tel que : $c_1 = \sigma^{-1}c_2\sigma$?

BANQUE D'EXERCICES - CORRIGÉS

EXERCICE 1. — Soit E fini de cardinal n . Etablir que $\text{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n$.

Pour tout entier $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, notons : $\mathcal{P}_k(E) = \{A \subset E, \text{Card}(A) = k\}$.

On a : $\mathcal{P}(E) = \bigcup_{k=0}^n \mathcal{P}_k(E)$.

Puisque le cardinal d'une partie de E est unique, l'union ci-dessus est disjointe et :

$$\text{Card}(\mathcal{P}(E)) = \sum_{k=0}^n \text{Card}(\mathcal{P}_k(E)) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

EXERCICE 2. — Soient n et p deux entiers naturels, avec $p \leq n$. Combien existe-t-il d'applications $f : \mathbb{N}_p \rightarrow \mathbb{N}_n$ strictement croissantes ?

Une application strictement croissante de $\mathbb{N}_p$ dans $\mathbb{N}_n$ est entièrement déterminée par son image, c-à-d par une partie à p éléments de $\mathbb{N}_n$.

Conclusion. Il existe $\binom{n}{p}$ applications strictement croissantes $\mathbb{N}_p$ dans $\mathbb{N}_n$.

EXERCICE 3. — Dans S_5 , combien existe-t-il de transpositions ?

Dans S_5 , une transposition est uniquement déterminée par son support (les transpositions (ij) et (ji) étant égales), qui est une combinaison de 2 éléments parmi 5.

Conclusion. Il existe $\binom{5}{2} = 10$ transpositions dans S_5 .

EXERCICE 4. — Dans S_5 , combien existe-t-il de 3-cycles ?

Dans S_5 , un 3-cycle est uniquement déterminé par son support, disons $\{a_1, a_2, a_3\}$; et par l'image de a_1 (deux choix possibles).

Conclusion. Il existe $2 \times \binom{5}{3} = 20$ 3-cycles dans S_5 .

EXERCICE 5. — Dans S_5 , combien existe-t-il de produits de 2 transpositions à supports disjoints ?

Dans S_5 , une permutation qui est le produit de 2 transpositions à supports disjoints est uniquement déterminée par son support, disons $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$; et par l'image de a_1 (trois choix possibles).

Conclusion. Il existe $3 \times \binom{5}{4} = 15$ produits de 2 transpositions à supports disjoints dans S_5 .

EXERCICE 6. — Soit n un entier ≥ 2 . On considère :

$$H = \{\sigma \in S_n, \sigma(1) = 1\}$$

H est donc l'ensemble des permutations de $\mathbb{N}_n$ laissant 1 invariant.

Montrer que H est un sous-groupe de S_n . Quel est son cardinal ?

H est inclus dans S_n par définition (SG1); $\text{id}_{\mathbb{N}_n}$ appartient à H ; on vérifie aisément que si σ et ρ sont deux éléments de H , alors $\sigma\rho$ et σ^{-1} appartiennent à H (SG3 et SG4).

On en déduit que H est un sous-groupe de S_n .

Par ailleurs, H est équipotent à l'ensemble des permutations de $\llbracket 2, n \rrbracket$, qui est de cardinal $(n-1)!$ selon le cours.

Conclusion. H est un sous-groupe de S_n , et $\text{Card}(H) = (n-1)!$.

EXERCICE 7. — Soit n un entier ≥ 2 . Combien existe-t-il d'éléments de S_n qui échangent 1 et 2 ?

Autant que de permutations de $\llbracket 3, n \rrbracket$.

Conclusion. Il existe $(n-2)!$ éléments de S_n qui échangent 1 et 2.

EXERCICE 8. — Dans S_8 on considère le 6-cycle $c_1 = (135246)$ et le 3-cycle $c_2 = (154)$.

Existe-t-il un élément σ de S_8 tel que : $c_1 = \sigma^{-1}c_2\sigma$?

Supposons qu'il existe une permutation σ telle que : $c_1 = \sigma^{-1}c_2\sigma$.

Alors on aurait : $\varepsilon(c_1) = \varepsilon(\sigma^{-1}c_2\sigma)$.

Or, selon les propriétés de la signature :

$$\varepsilon(\sigma^{-1}c_2\sigma) = \varepsilon(\sigma^{-1})\varepsilon(c_2)\varepsilon(\sigma) = \underbrace{\varepsilon(\sigma^{-1})\varepsilon(\sigma)}_{=1}\varepsilon(c_2) = \varepsilon(c_2)$$

D'où : $\varepsilon(c_1) = \varepsilon(c_2)$. Or, selon le cours : $\varepsilon(c_1) = (-1)^{6-1} = -1$ et $\varepsilon(c_2) = (-1)^{3-1} = 1$. Contradiction.

Conclusion. Il n'existe aucune permutation $\sigma \in S_8$ telle que : $c_1 = \sigma^{-1}c_2\sigma$.