

EXERCICES 16 — APPLICATIONS DE LA DÉRIVATION — CORRIGÉ

RÉVISIONS

EXERCICE 1. — Sur quelles parties de \mathbb{R} les fonctions suivantes sont-elles continues ? Dérivables ?

$$1) \text{ la fonction } f \text{ définie par : } f(x) = \begin{cases} x \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad 2) \text{ la fonction } g \text{ définie par : } g(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1) Selon les théorèmes généraux, la fonction f est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^* . En particulier, elle est dérivable, et a fortiori continue sur \mathbb{R}^* .

De plus, on a : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ (par encadrement). Donc : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$. La fonction f est donc continue en 0.

Enfin, pour tout réel x non nul, on a :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \sin(1/x)$$

Or $\sin(1/x)$ n'admet pas de limite lorsque x tend vers 0. Donc f n'est pas dérivable en 0.

Conclusion. La fonction f est continue sur \mathbb{R} , dérivable sur \mathbb{R}^* et non dérivable en 0.

2) Selon les théorèmes généraux, la fonction g est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^* . En particulier, elle est dérivable, et a fortiori continue sur \mathbb{R}^* .

De plus, on a : $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ (par encadrement). Donc : $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = g(0)$. La fonction g est donc continue en 0.

Enfin, pour tout réel x non nul, on a :

$$\frac{g(x) - g(0)}{x} = x \sin(1/x)$$

D'où : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = 0$ (par encadrement). Il s'ensuit que g est dérivable en 0 (et que $g'(0) = 0$).

Conclusion. La fonction g est dérivable sur \mathbb{R} . A fortiori, elle est continue sur \mathbb{R} .

EXERCICE 2. — Soit f une fonction dérivable sur \mathbb{R} . Que peut-on dire de f' si f est paire ? Si f est impaire ?

Supposons que f est paire. On a alors pour tout réel x : $f(-x) = f(x)$.

En dérivant terme à terme cette égalité, on obtient : $-f'(-x) = f'(x)$.

Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(-x) = -f'(x)$. D'où f' est impaire.

Raisonnement analogue en supposant f impaire.

Conclusion. $[f \text{ dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et paire}] \implies [f' \text{ impaire}]$ et $[f \text{ dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et impaire}] \implies [f' \text{ paire}]$

EXERCICE 3. — Soit f une fonction dérivable sur \mathbb{R} telle que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |f(x) - f(y)| \leq |x - y|^3$. Prouver que f est constante.

Soit a un réel quelconque. Pour tout réel h non nul, on a (selon l'hypothèse de l'énoncé) :

$$\left| \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right| \leq |h|^2$$

Il s'ensuit que : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = 0$. D'où : $f'(a) = 0$.

Le réel a étant arbitraire dans le raisonnement précédent, on en déduit que f' est identiquement nulle sur \mathbb{R} .

Conclusion. La fonction f est constante sur \mathbb{R} .

EXERCICE 4. — Calculer la dérivée n -ième des fonctions f , g et h respectivement définies par :

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \qquad g(x) = \frac{1}{1+x} \qquad h(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

Selon les théorèmes généraux, les fonctions f , g et h sont de classe \mathcal{C}^∞ sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ respectivement.

Pour tout réel $x \neq 1$ et pour tout entier naturel n on a : $f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$ (récurrence sur n).

Pour tout réel $x \neq -1$ et pour tout entier naturel n on a : $g^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$ (récurrence sur n).

Enfin, pour tout réel $x \neq \pm 1$, on a :

$$h(x) = \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} \right) = \frac{1}{2} (f(x) + g(x))$$

Par linéarité de la dérivation, on en déduit que pour tout réel $x \neq \pm 1$ et pour tout entier naturel n on a :

$$h^{(n)}(x) = \frac{1}{2} (f^{(n)}(x) + g^{(n)}(x)) = \frac{1}{2} \left(\frac{n!}{(1-x)^{n+1}} + \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}} \right)$$

EXERCICE 5. — Sauriez-vous redémontrer les propriétés ci-dessous ?

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n ; \quad \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1} ; \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

Pour les deux premières, on introduit la fonction f en posant : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$.

On a donc : $f(1) = 2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$.

La fonction f est dérivable sur \mathbb{R} , et pour tout réel x on a : $f'(x) = n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} x^{k-1}$.

On a donc : $f'(1) = n2^{n-1} = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}$.

Pour la troisième, on introduit la fonction g en posant : $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = x^{2n}$.

On calcule ensuite la dérivée n -ème de g de deux manières différentes : directement, ou en écrivant $g(x) = x^n \times x^n$ et en appliquant la formule de Leibniz.

THÉORÈMES DE ROLLE ET DES ACCROISSEMENTS FINIS

EXERCICE 6. — Etablir les inégalités suivantes :

$$\left. \begin{array}{l} 1) \forall x \in \mathbb{R}, |\sin x| \leq |x|. \\ 2) \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |\cos x - \cos y| \leq |x - y|. \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3) \forall x \in]0; 1[, \sqrt{1-x^2} \arcsin(x) < x. \\ 4) \forall x > 0, \arctan x > \frac{x}{1+x^2}. \end{array}$$

1/ Pour $x = 0$ l'inégalité est triviale.

Considérons x un réel strictement positif. La fonction \sin est continue sur $[0, x]$, et dérivable sur $]0, x[$: on peut donc lui appliquer le théorème des accroissements finis pour affirmer que :

$$\exists c \in]0, x[, \frac{\sin(x)}{x} = \cos(c)$$

On en déduit que : $\left| \frac{\sin(x)}{x} \right| \leq 1$. D'où : $|\sin(x)| \leq |x|$.

En résumé, on a établi jusqu'à présent que : $\forall x \in \mathbb{R}_+, |\sin(x)| \leq |x|$.

On étend l'inégalité à \mathbb{R} tout entier en utilisant l'imparité de la fonction \sin .

Conclusion. $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin x| \leq |x|$

2/ Pour $x = y$ l'inégalité est triviale.

Considérons x et y deux réels distincts. La fonction \cos étant dérivable (donc continue) sur \mathbb{R} , on peut lui appliquer le théorème des accroissements finis entre x et y . Il existe donc un réel c strictement compris entre x et y tel que :

$$\frac{\cos x - \cos y}{x - y} = \sin(c)$$

On en déduit que : $\left| \frac{\cos x - \cos y}{x - y} \right| \leq 1$. D'où : $|\cos x - \cos y| \leq |x - y|$.

Conclusion. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |\cos x - \cos y| \leq |x - y|$

3/ Soit x un réel tel que $0 < x < 1$. La fonction \arcsin est continue sur $[0, x]$, et dérivable sur $]0, x[$: on peut donc lui appliquer le théorème des accroissements finis pour affirmer que :

$$\exists c \in]0, x[, \frac{\arcsin(x)}{x} = \frac{1}{\sqrt{1-c^2}}$$

D'où : $\exists c \in]0, x[, \sqrt{1-c^2} \arcsin(x) = x$. Or : $\sqrt{1-c^2} > \sqrt{1-x^2}$ (puisque $0 < c < x$).

Conclusion. $\forall x \in]0, 1[, \sqrt{1-x^2} \arcsin(x) < x$

4/ Soit x un réel strictement positif. La fonction \arctan est continue sur $[0, x]$, et dérivable sur $]0, x[$: on peut donc lui appliquer le théorème des accroissements finis pour affirmer que :

$$\exists c > 0, \frac{\arctan(x)}{x} = \frac{1}{1+c^2}$$

D'où : $\exists c > 0, \arctan(x) = \frac{x}{1+c^2}$. Or : $1+c^2 < 1+x^2$ (puisque $0 < c < x$).

Conclusion. $\forall x > 0, \arctan x > \frac{x}{1+x^2}$.

EXERCICE 7. — (Théorème de Rolle et fonctions à valeurs complexes : attention !)

On considère la fonction $f : [0; 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ telle que : $\forall t \in [0; 2\pi], f(t) = e^{it}$.

1) Calculer $f(0)$ et $f(2\pi)$. * 2) Calculer $f'(t)$ pour tout $t \in [0; 2\pi]$. † 3) Justifier que f' ne s'annule pas sur $[0; 2\pi]$.

1/ $f(0) = f(2\pi) = 1$. 2/ $\forall t \in [0; 2\pi], f'(t) = ie^{it}$. 3/ $\forall t \in [0; 2\pi], |f'(t)| = 1$. Donc f' ne s'annule pas sur $[0, 2\pi]$.

Ce mini-exo donne donc un exemple de fonction à valeurs complexes satisfaisant les hypothèses du théorème de Rolle (f est continue sur $[0, 2\pi]$, dérivable sur $]0, 2\pi[$, et $f(0) = f(2\pi)$) ; mais, n'étant pas à valeurs réelles, le théorème de Rolle ne peut lui être appliquée (et de fait la dérivée f' ne s'annule pas sur $[0, 2\pi]$).

EXERCICE 8. — (Suite récurrente définie *via* une fonction contractante). Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^* par $f : x \mapsto 4 - \frac{1}{4} \ln|x|$.

1) Etudier la fonction f , et vérifier que $f([3; 4]) \subset [3; 4]$. Prouver que si x appartient à $[3; 4]$, alors $|f'(x)| \leq \frac{1}{12}$.

► La fonction f étant paire, il suffit de l'étudier sur \mathbb{R}_+^* . Sur \mathbb{R}_+^* , f est dérivable (TG) et on a :

$$\forall x > 0, f'(x) = -\frac{1}{4x}$$

La fonction f est donc strictement décroissante sur \mathbb{R}_+^* . Par parité, elle est strictement croissante sur \mathbb{R}_-^* .

► Puisque f est continue sur $[3, 4]$, on a : $f([3; 4]) = [f(4), f(3)]$.

Or : $f(4) = 4 - \frac{1}{4} \ln 4 < 4$. Et $f(3) = 4 - \frac{1}{4} \ln 3 > 3$ (puisque $\ln(3) < 4$). D'où : $3 < f(3) < f(4) < 4$.

Il s'ensuit que : $f([3; 4]) \subset [3; 4]$.

*. Il n'y a pas de piège.

†. Il n'y a pas de piège ici non plus.

► Enfin, pour tout réel $x > 0$, on a : $\forall x > 0, |f'(x)| = \frac{1}{4x}$.

On en déduit que : $\forall x \in [3, 4], |f'(x)| \leq |f'(3)| \leq \frac{1}{12}$.

Conclusion. $f([3; 4]) \subset [3; 4]$ et $\forall x \in [3, 4], |f'(x)| \leq \frac{1}{12}$

2) Démontrer qu'il existe un unique réel $\ell \in [3; 4]$ tel que $f(\ell) = \ell$.

Pour tout réel $x \in [3, 4]$, on pose : $g(x) = f(x) - x$. On a $g(3) \geq 0$ (puisque $f(3) \geq 3$) et $g(4) \leq 0$ (puisque $f(4) \leq 4$). La fonction g étant continue sur $[3, 4]$, le TVI permet d'affirmer qu'il existe un réel $\ell \in [3, 4]$ tel que $g(\ell) = 0$, c'est-à-dire tel que $f(\ell) = \ell$.

Montrons l'unicité de ce réel. Supposons qu'il existe deux réels distincts ℓ et ℓ' dans $[3, 4]$ tels que $f(\ell) = \ell$ et $f(\ell') = \ell'$. SNALG, on peut supposer que $\ell < \ell'$. On peut alors appliquer le TAF à f sur $[\ell, \ell']$ pour affirmer que :

$$\exists c \in]\ell, \ell'[, \quad f(\ell') - f(\ell) = f'(c)(\ell' - \ell)$$

D'où : $\ell' - \ell = f'(c)(\ell' - \ell)$. D'où : $|\ell' - \ell| = |f'(c)| \times |\ell' - \ell|$.

D'après la question précédente, on en déduit que : $|\ell' - \ell| \leq \frac{1}{12} \times |\ell' - \ell|$.

Donc : $1 \leq \frac{1}{12} \dots$ Absurde. Il s'ensuit que $\ell = \ell'$, ce qui fournit l'unicité désirée.

Conclusion. $\exists! \ell \in [3, 4], f(\ell) = \ell$

3) On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$, et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Justifier que pour tout entier naturel n , $u_n \in [3; 4]$.

Récurrence immédiate en utilisant la question 1 ($f([3; 4]) \subset [3; 4]$).

b) Montrer que pour tout entier naturel n , $|u_{n+1} - \ell| \leq \frac{1}{12} |u_n - \ell|$.

Soit n un entier naturel. Si $u_n = \ell$, alors $u_{n+1} = \ell$ et l'inégalité est vérifiée.

Sinon, on peut appliquer le TAF à la fonction f entre u_n et ℓ pour affirmer qu'il existe un réel c entre u_n et ℓ tel que :

$$\frac{f(u_n) - f(\ell)}{u_n - \ell} = f'(c) \iff \frac{u_{n+1} - \ell}{u_n - \ell} = f'(c) \implies \left| \frac{u_{n+1} - \ell}{u_n - \ell} \right| = |f'(c)|$$

Or d'après la question 1, on a : $|f'(c)| \leq \frac{1}{12}$. Il s'ensuit que : $\left| \frac{u_{n+1} - \ell}{u_n - \ell} \right| \leq \frac{1}{12}$.

Conclusion. $|u_{n+1} - \ell| \leq \frac{1}{12} |u_n - \ell|$

c) En déduire que pour tout entier naturel n , $|u_n - \ell| \leq \left(\frac{1}{12}\right)^n$.

Récurrence immédiate sur n (hérédité fournie par la question précédente, l'initialisation provenant de $|u_0 - \ell| \leq 1$ puisque u_0 et ℓ sont dans $[3, 4]$).

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \ell| \leq \left(\frac{1}{12}\right)^n$

Or : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{12}\right)^n = 0$. On en déduit que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - \ell| = 0$.

Par conséquent, la suite (u_n) converge vers ℓ .

EXERCICE 9. — Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On suppose que f' ne s'annule pas sur \mathbb{R} . Montrer que f n'est pas périodique.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable, telle que f' ne s'annule pas sur \mathbb{R} .

Par l'absurde, supposons que f est périodique. Il existe un réel $T > 0$ tel que f est T -périodique. Sur l'intervalle $[0, T]$, la fonction f vérifie les hypothèses du théorème de Rolle. Il existe donc un réel $c \in]0, T[$ tel que $f'(c) = 0$: contradiction (puisque f' ne s'annule pas sur \mathbb{R}).

Conclusion. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Si f' ne s'annule pas sur \mathbb{R} , alors f n'est pas périodique.

EXERCICE 10. — (**Règle de l'Hospital**)[‡]. Soient f et g deux fonctions vérifiant les hypothèses des accroissements finis sur $]a; b[$. On suppose de plus que g' ne s'annule pas sur $]a; b[$.

Montrer qu'il existe un réel c dans $]a; b[$ tel que : $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$

Pour tout réel $x \in [a, b]$, on pose :

$$h(x) = g(x)(f(b) - f(a)) - f(x)(g(b) - g(a))$$

Conclusion. La fonction h est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ (hypothèses + TG). En outre :

$$h(a) = g(a)(f(b) - f(a)) - f(a)(g(b) - g(a)) = g(a)f(b) - f(a)g(b)$$

$$\text{et } h(b) = g(b)(f(b) - f(a)) - f(b)(g(b) - g(a)) = g(a)f(b) - f(a)g(b)$$

Ainsi : $h(a) = h(b)$. La fonction h satisfait donc les hypothèses du théorème de Rolle. Par suite :

$$\exists c \in]a; b[, \quad h'(c) = 0$$

Donc : $\exists c \in]a; b[, \quad g'(c)(f(b) - f(a)) - f'(c)(g(b) - g(a)) = 0$.

Puisque g' ne s'annule pas sur $]a; b[$, on peut conclure : $\exists c \in]a; b[, \quad \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$

EXERCICE 11. — Déterminer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[(x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}} \right]$

Pour tout réel $u > 0$, notons : $f(u) = ue^{\frac{1}{u}}$.

Soit x un réel strictement positif. La fonction f est continue sur $[x, x+1]$ et dérivable sur $]x, x+1[$ (car f est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}_+^* selon les théorèmes généraux).

On peut donc lui appliquer le TAF et affirmer que :

$$\exists c \in]x, x+1[, \quad f(x+1) - f(x) = f'(c) \quad (\spadesuit)$$

Or : $f'(c) = e^{\frac{1}{c}} \left(1 - \frac{1}{c} \right)$. D'où : $\lim_{c \rightarrow +\infty} f'(c) = 1 \quad (\clubsuit)$.

Conclusion. D'après (\spadesuit) et (\clubsuit) : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[(x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}} \right] = 1$.

‡. Du nom du marquis de l'Hospital (1661-1704), qui fut un élève de Jean Bernoulli (1667-1748), mathématicien suisse.

EXERCICE 12. — (Convergence des séries de Riemann). Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On définit une suite $(u_N)_{N \in \mathbb{N}^*}$ en posant :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad u_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^\alpha}$$

Le but de l'exercice est d'étudier la limite de la suite (u_N) en fonction des valeurs de α .

1) (Le cas $\alpha = 1$) — A l'aide du théorème des accroissements finis, établir que : $\forall N \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{N} \geq \ln(N+1) - \ln(N)$.
En déduire la limite de la suite (u_N) dans le cas où $\alpha = 1$.

2) (Le cas $\alpha \leq 0$) — La suite $(u_N)_N$ étant (positive) et croissante, elle admet une limite finie ou tend vers $+\infty$.

a) On suppose que $(u_N)_N$ admet une limite finie ℓ . Montrer que : $u_{N+1} - u_N$ tend vers 0 quand N tend vers $+\infty$.

b) En déduire une condition nécessaire sur α pour que $(u_N)_N$ converge.

3) (Le cas $\alpha > 0, \alpha \neq 1$) — Sans vouloir tuer tout suspense, la condition nécessaire de la question précédente n'est pas suffisante. Et c'est l'objet de cette question de préciser cette affirmation.

On suppose donc $\alpha > 0$ et $\alpha \neq 1$.

a) On considère la fonction f définie sur \mathbb{R}_+^* en posant : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = x^{1-\alpha}$.

Justifier brièvement que f est dérivable sur \mathbb{R}_+^* , calculer sa dérivée, et donner son sens de variation.

b) Soit n un entier naturel non nul. Etablir que : $\exists c \in]n; n+1[$, $\frac{1}{c^\alpha} = \frac{(n+1)^{1-\alpha} - n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$

c) Dans cette question, on suppose $0 < \alpha < 1$.

i) Soit n un entier naturel non nul. Déduire de la question précédente que : $\frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{(n+1)^{1-\alpha} - n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$

ii) Etablir alors que : $\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{1-\alpha} [(N+1)^{1-\alpha} - 1]$

iii) En déduire la limite de (u_N) dans le cas où $0 < \alpha < 1$.

d) Dans cette question, on suppose que $\alpha > 1$. Prouver que (u_N) est convergente.

Pour la correction de ce problème, voir épilogue du chapitre 17 (dans le pdf, page 440).

EXERCICE 13. — Dans cet exercice, I désigne un intervalle de \mathbb{R} ouvert et non-vidé.

1) Énoncer le théorème de Rolle.

Voir cours.

2) Soit h une fonction de I vers \mathbb{R} , dérivable sur I , et p un entier naturel, $p \geq 2$. On suppose que h s'annule p fois sur I , démontrer que h' s'annule au moins $p-1$ fois sur I .

Notons x_1, \dots, x_p les valeurs d'annulation de h . Quitte à renuméroter ces réels, on peut supposer : $x_1 < \dots < x_p$.

Sur chacun des intervalles $[x_k, x_{k+1}]$ (avec $k \in [1, p-1]$), la fonction h vérifie les hypothèses du théorème de Rolle. On peut donc affirmer que :

$$\forall k \in [1, p-1], \exists c_k \in]x_k, x_{k+1}[, h'(c_k) = 0$$

Les réels c_1, \dots, c_{p-1} sont $p-1$ valeurs d'annulation de h' .

Conclusion. Si h est dérivable sur I et à valeurs réelles, et si h s'annule p fois sur I , alors h' s'annule au moins $p-1$ fois sur I .

3) On considère les fonctions a et b de $]0; +\infty[$ vers \mathbb{R} définies en posant pour tout réel $x > 0$:

$$a(x) = 3x^{-20} + x^{-10} + 4x^{10} + 2x^{20} + 11x^{30} \quad \text{et} \quad b(x) = -150x^{-51} - 40x^{-41} - 80x^{-21} - 20x^{-11}$$

On suppose que b s'annule au plus 3 fois dans $]0; +\infty[$. Montrer que a s'annule au plus 4 fois dans $]0; +\infty[$.

Soit $x > 0$. Posons : $h(x) = \frac{a(x)}{x^{30}}$. On a : $h(x) = 3x^{-50} + x^{-40} + 4x^{-20} + 2x^{-10} + 11$.

La fonction h est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et :

$$\forall x > 0, h'(x) = -150x^{-51} - 40x^{-41} - 80x^{-21} - 20x^{-11} = b(x) \text{ (quelle chance !)}$$

Supposons que a s'annule 5 fois (au moins) sur \mathbb{R}_+^* . Alors h s'annule 5 fois (au moins) sur \mathbb{R}_+^* , et d'après la question précédente, $h' = b$ s'annule 4 fois (au moins) sur \mathbb{R}_+^* : ce qui contredit l'hypothèse faite sur b .

Conclusion. La fonction a s'annule au plus 4 fois dans $]0; +\infty[$.

EXERCICE 14. — (DS9 mars 2018). On considère la fonction f définie par : $f(x) = \sqrt{2 - \ln(x)}$.

- 1) Préciser l'ensemble de définition D de f , puis dresser le tableau de variation de f .
- 2) Montrer que l'intervalle $[1; e]$ est stable par f . En déduire l'existence d'un unique point fixe a pour f dans $[1; e]$.
- 3) On considère la suite $(u_n)_n$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - a| \leq \frac{1}{2} |u_n - a|$$

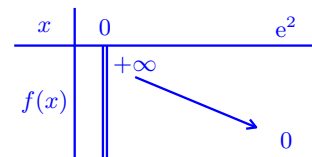
4) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - a| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (e - 1)$ puis en déduire la limite de la suite u .

1) Le réel $\sqrt{2 - \ln(x)}$ est défini SSI $\ln(x)$ est défini et $2 - \ln(x) \geq 0$, càd SSI $0 < x \leq e^2$. L'ensemble de définition de f est donc $D =]0, e^2]$.

La fonction f est continue sur D et dérivable sur $D \setminus \{e^2\}$ d'après les théorèmes généraux, et on a :

$$\forall x \in]0, e^2[, f'(x) = -\frac{1}{2x\sqrt{2 - \ln(x)}}$$

On en déduit que f est strictement décroissante sur D . En outre $f(e^2) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$.



2) La fonction f est continue et strictement décroissante sur D , donc en particulier sur $[1, e]$. A ce titre, elle réalise une bijection de $[1, e]$ sur $[f(e), f(1)]$, càd sur l'intervalle $[1, \sqrt{2}]$. Puisque $\sqrt{2} \in [1, e]$, on en déduit que : $[1, e]$ est stable par f .

Puisque la fonction f est continue sur $[1, e]$ et qu'elle laisse stable ce segment, le théorème du point fixe permet d'affirmer qu'il existe un réel a tel que $f(a) = a$. Comme en outre la fonction $x \mapsto f(x) - x$ est strictement décroissante sur $[1, e]$, a est l'unique point fixe de la fonction f .

3) Puisque u_0 appartient à l'intervalle stable $[1, e]$, tous les termes de la suite u appartiennent à $[1, e]$; ce qui justifie en particulier que la suite u est bien définie.

Soit n un entier naturel quelconque. Puisque u_n et a appartiennent à l'intervalle $[1, e]$, et que f est continue (resp. dérivable) sur $[1, e]$ (resp. sur $]1, e[$), on peut appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction f entre a et u_n :

$$\text{il existe un réel } c_n \text{ compris entre } a \text{ et } u_n \text{ tel que : } f'(c_n) = \frac{f(u_n) - f(a)}{u_n - a}$$

$$\implies \text{il existe un réel } c_n \text{ compris entre } a \text{ et } u_n \text{ tel que : } f'(c_n) = \frac{u_{n+1} - a}{u_n - a}$$

$$\implies \text{il existe un réel } c_n \text{ compris entre } a \text{ et } u_n \text{ tel que : } u_{n+1} - a = f'(c_n) \times (u_n - a)$$

$$\implies \text{il existe un réel } c_n \text{ compris entre } a \text{ et } u_n \text{ tel que : } |u_{n+1} - a| = |f'(c_n)| \times |u_n - a| \quad (\spadesuit)$$

Par ailleurs, pour tout réel $x \in]1, e[$ on a :

$$|f'(x)| = \left| \frac{1}{2x\sqrt{2 - \ln(x)}} \right| \leq \left| \frac{1}{2\sqrt{2 - \ln(x)}} \right| \leq \frac{1}{2} \quad (\clubsuit)$$

la première majoration provenant du fait que $x \geq 1$, et la seconde du fait que $\sqrt{2 - \ln(x)} \geq 1$ sur $[1, e]$.

On déduit de (\spadesuit) et de (\clubsuit) que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - a| \leq \frac{1}{2} |u_n - a|$.

4) L'assertion " $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - a| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (e - 1)$ " se déduit de la question précédente par une récurrence immédiate.

Puisque par ailleurs $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - a| = 0$, ce qui signifie que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$.