

EXERCICES 16 — APPLICATIONS DE LA DÉRIVATION

RÉVISIONS

EXERCICE 1. — Sur quelles parties de \mathbb{R} les fonctions suivantes sont-elles continues ? Dérivables ?

$$1) \text{ la fonction } f \text{ définie par : } f(x) = \begin{cases} x \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad 2) \text{ la fonction } g \text{ définie par : } g(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

EXERCICE 2. — Soit f une fonction dérivable sur \mathbb{R} . Que peut-on dire de f' si f est paire ? Si f est impaire ?

EXERCICE 3. — Soit f une fonction dérivable sur \mathbb{R} telle que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |f(x) - f(y)| \leq |x - y|^3$. Prouver que f est constante.

EXERCICE 4. — Calculer la dérivée n -ième des fonctions f , g et h respectivement définies par :

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \qquad g(x) = \frac{1}{1+x} \qquad h(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

EXERCICE 5. — Sauriez-vous redémontrer les propriétés ci-dessous ?

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n; \quad \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1}; \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

THÉORÈMES DE ROLLE ET DES ACCROISSEMENTS FINIS

EXERCICE 6. — Etablir les inégalités suivantes :

$$\left. \begin{array}{l} 1) \forall x \in \mathbb{R}, |\sin x| \leq |x|. \\ 2) \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |\cos x - \cos y| \leq |x - y|. \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3) \forall x \in]0; 1[, \sqrt{1-x^2} \arcsin(x) < x. \\ 4) \forall x > 0, \arctan x > \frac{x}{1+x^2}. \end{array}$$

EXERCICE 7. — (Théorème de Rolle et fonctions à valeurs complexes : attention !)

On considère la fonction $f : [0; 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ telle que : $\forall t \in [0; 2\pi], f(t) = e^{it}$.

1) Calculer $f(0)$ et $f(2\pi)$. * 2) Calculer $f'(t)$ pour tout $t \in [0; 2\pi]$. † 3) Justifier que f' ne s'annule pas sur $[0; 2\pi]$.

EXERCICE 8. — (Suite récurrente définie *via* une fonction contractante). Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^* par $f : x \mapsto 4 - \frac{1}{4} \ln|x|$.

1) Etudier la fonction f , et vérifier que $f([3; 4]) \subset [3; 4]$. Prouver que si x appartient à $[3; 4]$, alors $|f'(x)| \leq \frac{1}{12}$.

2) Démontrer qu'il existe un unique réel $\ell \in [3; 4]$ tel que $f(\ell) = \ell$.

3) On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$, et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Justifier que pour tout entier naturel n , $u_n \in [3; 4]$.

b) Montrer que pour tout entier naturel n , $|u_{n+1} - \ell| \leq \frac{1}{12} |u_n - \ell|$.

c) En déduire que pour tout entier naturel n , $|u_n - \ell| \leq \left(\frac{1}{12}\right)^n$.

EXERCICE 9. — Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On suppose que f' ne s'annule pas sur \mathbb{R} . Montrer que f n'est pas périodique.

EXERCICE 10. — (Règle de l'Hospital)[‡]. Soient f et g deux fonctions vérifiant les hypothèses des accroissements finis sur $[a; b]$. On suppose de plus que g' ne s'annule pas sur $]a; b[$.

Montrer qu'il existe un réel c dans $]a; b[$ tel que : $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$

*. Il n'y a pas de piège.

†. Il n'y a pas de piège ici non plus.

‡. Du nom du marquis de l'Hospital (1661-1704), qui fut un élève de Jean Bernoulli (1667-1748), mathématicien suisse.

EXERCICE 11. — Déterminer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[(x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}} \right]$

EXERCICE 12. — (**Convergence des séries de Riemann**). Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On définit une suite $(u_N)_{N \in \mathbb{N}^*}$ en posant :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad u_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^\alpha}$$

Le but de l'exercice est d'étudier la limite de la suite (u_N) en fonction des valeurs de α .

1) (**Le cas $\alpha = 1$**) — A l'aide du théorème des accroissements finis, établir que : $\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{N} \geq \ln(N+1) - \ln(N)$.
En déduire la limite de la suite (u_N) dans le cas où $\alpha = 1$.

2) (**Le cas $\alpha \leq 0$**) — La suite $(u_N)_N$ étant (positive) et croissante, elle admet une limite finie ou tend vers $+\infty$.

a) On suppose que $(u_N)_N$ admet une limite finie ℓ . Montrer que : $u_{N+1} - u_N$ tend vers 0 quand N tend vers $+\infty$.

b) En déduire une condition nécessaire sur α pour que $(u_N)_N$ converge.

3) (**Le cas $\alpha > 0, \alpha \neq 1$**) — Sans vouloir tuer tout suspense, la condition nécessaire de la question précédente n'est pas suffisante. Et c'est l'objet de cette question de préciser cette affirmation.

On suppose donc $\alpha > 0$ et $\alpha \neq 1$.

a) On considère la fonction f définie sur \mathbb{R}_+^* en posant : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = x^{1-\alpha}$.

Justifier brièvement que f est dérivable sur \mathbb{R}_+^* , calculer sa dérivée, et donner son sens de variation.

b) Soit n un entier naturel non nul. Etablir que : $\exists c \in]n; n+1[$, $\frac{1}{c^\alpha} = \frac{(n+1)^{1-\alpha} - n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$

c) Dans cette question, on suppose $0 < \alpha < 1$.

i) Soit n un entier naturel non nul. Déduire de la question précédente que : $\frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{(n+1)^{1-\alpha} - n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$

ii) Etablir alors que : $\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{1-\alpha} \left[(N+1)^{1-\alpha} - 1 \right]$

iii) En déduire la limite de (u_N) dans le cas où $0 < \alpha < 1$.

d) Dans cette question, on suppose que $\alpha > 1$. Prouver que (u_N) est convergente.

EXERCICE 13. — Dans cet exercice, I désigne un intervalle de \mathbb{R} ouvert et non-vide.

1) Enoncer le théorème de Rolle.

2) Soit h une fonction de I vers \mathbb{R} , dérivable sur I , et p un entier naturel, $p \geq 2$. On suppose que h s'annule p fois sur I , démontrer que h' s'annule au moins $p-1$ fois sur I .

3) On considère les fonctions a et b de $]0; +\infty[$ vers \mathbb{R} définies en posant pour tout réel $x > 0$:

$$a(x) = 3x^{-20} + x^{-10} + 4x^{10} + 2x^{20} + 11x^{30} \quad \text{et} \quad b(x) = -150x^{-51} - 40x^{-41} - 80x^{-21} - 20x^{-11}$$

On suppose que b s'annule au plus 3 fois dans $]0; +\infty[$. Montrer que a s'annule au plus 4 fois dans $]0; +\infty[$.

EXERCICE 14. — (**DS9 mars 2018**). On considère la fonction f définie par : $f(x) = \sqrt{2 - \ln(x)}$.

1) Préciser l'ensemble de définition D de f , puis dresser le tableau de variation de f .

2) Montrer que l'intervalle $[1; e]$ est stable par f . En déduire l'existence d'un unique point fixe a pour f dans $[1; e]$.

3) On considère la suite $(u_n)_n$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - a| \leq \frac{1}{2} |u_n - a|$$

4) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - a| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (e - 1)$ puis en déduire la limite de la suite u .