

Chapitre 16 : Applications de la dérivation

1 – Généralités

Rappels : notion de fonction dérivable en a , de nombre dérivé à gauche ou à droite en a . Une fonction f est dérivable en a SSI f admet un DL à l'ordre 1 en a . Conséquence : dérivable implique continue (réciproque fausse).

2 – Dérivation et extremums

Propriété. Soit f une fonction dérivable sur I (intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$), et soit $c \in I$. Si f admet un extremum local en c , alors $f'(c) = 0$.

La réciproque est fausse ($x \mapsto x^3 \dots$), et l'énoncé n'est plus valide sur segment.

Théorème de Rolle. Si f est dérivable sur $]a; b[$, continue sur $[a, b]$, et $f(a) = f(b)$ alors $\exists c \in]a; b[$, $f'(c) = 0$.

Remarque : si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et s'annule (au moins) n fois sur $\mathbb{R}$, alors f' s'annule (au moins) $n - 1$ fois sur $\mathbb{R}$.

3 – Dérivation et sens de variation

Théorème des accroissements finis (TAF). Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable sur $]a, b[$, continue sur $[a, b]$, alors $\exists c \in]a; b[$, $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Interprétation graphique : il existe au moins un réel $c \in]a, b[$ tel que la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse c soit parallèle à la droite joignant les points de $\mathcal{C}_f$ d'abscisses a et b .

Interprétation cinématique : sous réserve que vous vous déplaçiez “gentiment” (= “de façon dérivable”) en voiture, il existe au moins un instant où votre vitesse instantanée aura été égale à votre vitesse moyenne sur le parcours.

Interprétation génératrice de torticolis : le TAF est le “théorème de Rolle en pente”.

Corollaire. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I .

- 1) f est croissante sur I SSI $f' \geq 0$ sur I
- 2) f est décroissante sur I SSI $f' \leq 0$ sur I
- 3) f est monotone sur I SSI $f' = 0$ sur I

Corollaire (Inégalité des accroissements finis).

Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable sur I , et s'il existe un réel K tel que $|f'| \leq K$ sur I , alors : $\forall (a, b) \in I^2$, $|f(b) - f(a)| \leq K |b - a|$.

Interprétation cinématique : si vous roulez pendant une heure en ne dépassant jamais la vitesse de 100km/h, vous parcourrez moins de 100 kilomètres !

Remarque : la condition “ $|f'| \leq K$ sur I ” est en particulier vérifiée lorsque I est un segment et que f est de classe $\mathcal{C}^1$.

Application : $\forall x \in \mathbb{R}$, $|\sin(x)| \leq |x|$.

4 – Lipschitzianité

Définition. Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. f est **lipschitzienne** sur I s'il existe $K \in \mathbb{R}_+$ tel que : $\forall (x, y) \in I^2$, $|f(y) - f(x)| \leq K |y - x|$.

Exemples. 1) $\cos$, $\sin$ et $\arctan$ sont 1-lipschitziennes sur $\mathbb{R}$.

2) La fonction $x \mapsto x^2$ est 2-lipschitzienne sur $[0, 1]$.

3) La fonction $x \mapsto x^2$ n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}$; en effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $(n + 1)^2 - n^2 = 2n + 1 \rightarrow +\infty$.

En revanche, d'après l'inégalité des accroissements finis :

Propriété. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I . La fonction f est lipschitzienne sur I SSI f' est bornée sur I .

QUESTIONS DE COURS

- | | |
|--|---|
| <ul style="list-style-type: none">➤ Théorème de Rolle.➤ Théorème des accroissements finis.➤ Propriété. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur I. On a : f croissante sur $I \implies f'$ est positive sur I | <ul style="list-style-type: none">➤ Propriété. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur I. On a : f' est positive sur $I \implies f$ croissante sur I➤ Propriété. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur I. Alors : f' bornée sur $I \implies f$ lipschtzienne sur I |
|--|---|