Devoir surveillé n^{0}7

Mathématiques

Durée : 3 heures

Tout matériel électronique est interdit.

Les résultats doivent être <u>soulignés</u> ou $\boxed{\text{encadrés}}$.

Barème indicatif - Prob 1 : 28pts (9+19)   Prob 2 : 27pts (1+6+5+5+6+4)

Problème 1 — Une équation fonctionnelle

Partie 1 - Questions préliminaires

Les questions **1**/ et **2**/ de cette partie sont indépendantes.

1/ On considère les fonctions F et G respectivement définies en posant :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} \qquad \text{et} \qquad \forall\, x \in \,]-1,1[\,, \quad G(x) = \ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$$

a/ Etablir que : $\quad \forall\, x \in \mathbb{R}_+, \quad \mathrm{sh}(x) < \mathrm{ch}(x)$

b/ En déduire que : $\quad \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad -1 < F(x) < 1$

c/ Montrer que F réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $I = \,]-1,1[$, et que $F^{-1} = G$.

2/ On considère la fonction H définie en posant :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad H(x) = \frac{2x}{1+x^2}$$

Démontrer que H est bornée sur $\mathbb{R}$, et préciser les valeurs de son minimum et de son maximum.

Partie 2 - Une équation fonctionnelle

Jusqu'à la fin de ce problème, on cherche à résoudre le problème suivant :

> **Problème.** — Déterminer les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles et dérivables (donc continues) en 0 qui vérifient :
>
> $$\forall x \in \mathbb{R},\ f(2x) = \frac{2f(x)}{1 + \left(f(x)\right)^2}$$

3/ Déterminer les fonctions constantes solutions du problème posé.

4/ On suppose que f est solution. Donner sans justification les valeurs possibles de $f(0)$.

5/ Montrer que si f est solution, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ -1 \leqslant f(x) \leqslant 1$$

(*on pourra exprimer $f(x)$ en fonction de $f(x/2)$*).

6/ Montrer que si f est solution, alors $(-f)$ est également solution.

7/ **Dans cette question, on suppose que f est une solution du problème posé, que $f(0) = 1$, et que f n'est pas constante.**

On considère $x_0 \in \mathbb{R}$, tel que $f(x_0) \neq f(0)$, et on définit la suite (u_n) en posant : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = f\left(\dfrac{x_0}{2^n}\right)$.

- **a**/ Montrer que la suite (u_n) est convergente, et préciser sa limite.
- **b**/ Etablir une relation entre u_n et u_{n+1} ; en déduire que la suite (u_n) garde un signe constant, puis étudier sa monotonie suivant le signe de u_0.
- **c**/ En utilisant ce qui précède, aboutir à une contradiction. En déduire l'ensemble des fonctions f solutions du problème telles que $f(0) = 1$.
- **d**/ Que peut-on conclure si l'hypothèse "$f(0) = 1$" est remplacée par l'hypothèse "$f(0) = -1$" ?

8/ **Dans cette question, on suppose que f est une solution du problème posé, et que $f(0) = 0$.**

- **a**/ Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq -1$ et $f(x) \neq 1$.

  On définit alors une fonction g en posant : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = G(f(x))$, où G désigne la fonction introduite dans la question 1.
- **b**/ Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(2x) = 2g(x)$.
- **c**/ Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On définit une suite (v_n) en posant : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \dfrac{g\left(\dfrac{x}{2^n}\right)}{\left(\dfrac{x}{2^n}\right)}$.

  Etablir que la suite (v_n) est convergente et préciser sa limite.
- **d**/ En déduire que g est linéaire.

9/ **Synthèse**. Déterminer toutes les fonctions solutions du problème posé.

—— Problème 2 — Calcul matriciel et suite de Fibonacci ——

La suite de Fibonacci est le plus célèbre exemple de suite récurrente linéaire d'ordre 2 ; et les formules vues en cours cette année ont permis de déterminer l'expression de son terme général.

L'objectif principal de ce problème est de retrouver ce résultat par une toute autre méthode, en utilisant le calcul matriciel.

1/ On note $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Justifier brièvement que : $-\dfrac{1}{\varphi} = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Partie 1 - Puissances d'une matrice (première tentative)

Dans cette partie, on considère la matrice de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

On pose :

$$A = C + B \qquad \text{avec} \quad C = \mathrm{diag}(1,0) \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2/ On note $\mathrm{COM}(C)$ le commutant de la matrice C, càd l'ensemble des matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec C :

$$\mathrm{COM}(C) = \{M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}), \quad MC = CM\}$$

Etablir que $(\mathrm{COM}(C), +)$ est un sous-groupe de $(\mathrm{M}_2(\mathbb{R}), +)$.

3/ $(\mathrm{COM}(C), \times)$ est-il un sous-groupe de $(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}), \times)$?

4/ Déterminer explicitement le commutant $\mathrm{COM}(C)$ de la matrice C.

5/ Comparer $(C+B)^2$ et $C^2 + 2CB + B^2$. Le résultat était-il prévisible ?

Partie 2 - Puissances d'une matrice (seconde tentative)

Dans cette partie, on considère les matrices de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad D = \mathrm{diag}\left(\varphi, -\frac{1}{\varphi}\right) \qquad \text{et} \qquad P = \begin{pmatrix} \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} & \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

6/ Justifier que P est inversible, et calculer son inverse.

7/ Vérifier que : $P^{-1}AP = D$

8/ Etablir que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = PD^nP^{-1}$

Partie 3 - Suite de Fibonacci et calcul matriciel

Jusqu'à la fin de ce problème, on considère la suite $(\mathbf{F}_n)$ définie en posant :

$$\mathbf{F}_0 = 0\,; \qquad \mathbf{F}_1 = 1\,; \qquad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{F}_{n+2} = \mathbf{F}_{n+1} + \mathbf{F}_n$$

La suite $(\mathbf{F}_n)$ est la suite de Fibonacci, dont les premiers termes sont :

$$\mathbf{F}_0 = 0\,; \quad \mathbf{F}_1 = 1\,; \quad \mathbf{F}_2 = 1\,; \quad \mathbf{F}_3 = 2\,; \quad \mathbf{F}_4 = 3\,; \quad \mathbf{F}_5 = 5\,; \quad \mathbf{F}_6 = 8\,; \quad \mathbf{F}_7 = 13\,; \quad \mathbf{F}_8 = 21\ldots$$

Pour tout entier naturel n, on pose : $\qquad X_n = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_{n+1} \\ \mathbf{F}_n \end{pmatrix}$

9/ Etablir qu'il existe une matrice $Q \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, que l'on explicitera, telle que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad X_{n+1} = QX_n$$

10/ Etablir que : $\qquad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad X_n = Q^n X_0$

11/ En déduire l'expression de $\mathbf{F}_n$ en fonction de n *(on pourra utiliser des résultats de la partie 2)*.

Partie 4 - Suite de Fibonacci et fonction arctangente

Pour traiter les questions de cette partie, il suffit de connaître la définition de la suite $\mathbf{F}_n$, rappelée au début de la partie précédente.

12/ Etablir que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{F}_{n+1}^2 - \mathbf{F}_n \mathbf{F}_{n+2} = (-1)^n$$

13/ A l'aide de la question précédente, établir que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \arctan\left(\frac{1}{\mathbf{F}_{2n}}\right) = \arctan\left(\frac{1}{\mathbf{F}_{2n+1}}\right) + \arctan\left(\frac{1}{\mathbf{F}_{2n+2}}\right)$$

Indication : on n'utilisera surtout pas un raisonnement par récurrence.

14/ Etablir que :

$$\arctan\left(\frac{1}{3}\right) = \arctan\left(\frac{1}{5}\right) + \arctan\left(\frac{1}{13}\right) + \arctan\left(\frac{1}{34}\right) + \arctan\left(\frac{1}{55}\right)$$

Partie 5 - Suite de Fibonacci et Python

15/ Ecrire le script Python d'une fonction `Fibo(n)` qui reçoit comme paramètre un entier naturel `n`, et qui renvoie la valeur de $\mathbf{F}_{\mathtt{n}}$.

16/ Dans cette question, on admet que la suite de Fibonacci est croissante. Ecrire le script Python d'une fonction `Over(val)` qui reçoit comme paramètre un flottant `val`, et qui renvoie le plus petit entier naturel p tel que $\mathbf{F}_p >$`val`.