Corrigé du Devoir surveillé n^{0}7

Problème 1 — Une équation fonctionnelle

Partie 1 - Questions préliminaires

Les questions **1**/ et **2**/ de cette partie sont indépendantes.

1/ On considère les fonctions F et G respectivement définies en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \,]-1,1[\,, \quad G(x) = \ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$$

a/ Etablir que : $\quad \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \mathrm{sh}(x) < \mathrm{ch}(x)$

Pour tout réel x on a : $\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x) = \mathrm{e}^{-x}$. Il s'ensuit que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{sh}(x) < \mathrm{ch}(x)$

Conclusion. $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \mathrm{sh}(x) < \mathrm{ch}(x)$

b/ En déduire que : $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad -1 < F(x) < 1$

Pour tout réel x, on a : $F(x) = \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}$. La fonction ch étant positive sur $\mathbb{R}_+$, on déduit de la question précédente que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad 0 \leqslant F(x) < 1$$

La fonction F étant impaire, on en déduit que : $\forall x \in \mathbb{R}_-, \quad -1 < F(x) \leqslant 0$.

Conclusion. D'après ce qui précède : $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad -1 < F(x) < 1$

c/ Montrer que F réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $I = \,]-1,1[$, et que $F^{-1} = G$.

Pour tout réel x on a :

$$G(F(x)) = \ln\left(\sqrt{\frac{1+F(x)}{1-F(x)}}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}}{1-\dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2\mathrm{e}^x}{2\mathrm{e}^{-x}}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\mathrm{e}^{2x}\right) = x$$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R},\ G(F(x)) = x$. Par suite : $G \circ F = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$.

Par ailleurs, pour tout réel $x \in \,]-1,1[$ on a :

$$F(G(x)) = \frac{\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} - \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}}{\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} + \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}} = \frac{\left(\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} - \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\right)^2}{\dfrac{1+x}{1-x} - \dfrac{1-x}{1+x}} = \frac{\dfrac{1+x}{1-x} + \dfrac{1-x}{1+x} - 2}{\dfrac{(1+x)^2 - (1-x)^2}{1-x^2}}$$

$$= \frac{\dfrac{(1+x)^2 + (1-x)^2}{1-x^2} - 2}{\dfrac{(1+x)^2 - (1-x)^2}{1-x^2}} = \frac{\dfrac{2+2x^2-2+2x^2}{1-x^2}}{\dfrac{4x}{1-x^2}} = x$$

Donc : $\forall x \in \,]-1,1[\,,\ F(G(x)) = x$. Par suite : $F \circ G = \mathrm{id}_{]-1,1[}$.

Conclusion. Puisque $F \circ G = \mathrm{id}_{]-1,1[}$ et $G \circ F = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$, on peut affirmer que F est bijective, et que G est sa bijection réciproque.

2/ On considère la fonction H définie en posant :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad H(x) = \frac{2x}{1+x^2}$$

Démontrer que H est bornée sur $\mathbb{R}$, et préciser les valeurs de son minimum et de son maximum.

La fonction H est clairement impaire, et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ selon les théorèmes généraux. On peut donc calculer sa dérivée :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad H'(x) = \frac{2(1+x^2) - 4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1+x)}{(1+x^2)^2}(1-x)$$

Sur $\mathbb{R}_+$, la dérivée de H est du signe de $(1-x)$. La fonction H est donc croissante sur $[0,1]$, et décroissante sur $[1,+\infty\,[$. On en déduit le sens de variation de H sur $\mathbb{R}$ en utilisant l'imparité de H.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$H(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

On déduit en particulier de ce tableau de variation que H est bornée (entre -1 et 1) sur $\mathbb{R}$.

Conclusion. H est bornée sur $\mathbb{R}$. De plus, H atteint ses bornes et : $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} H(x) = -1$ et $\max\limits_{x\in\mathbb{R}} H(x) = 1$.

Partie 2 - Une équation fonctionnelle

Jusqu'à la fin de ce problème, on cherche à résoudre le problème suivant :

> **Problème.** — Déterminer les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles et dérivables (donc continues) en 0 qui vérifient :
>
> $$\forall\, x \in \mathbb{R}, \; f(2x) = \frac{2f(x)}{1+(f(x))^2}$$

3/ Déterminer les fonctions constantes solutions du problème posé.

Soit f constante égale à k. La fonction f est alors solution du problème posé si et seulement si : $k = \dfrac{2k}{1+k^2}$, càd SSI $k=0$ ou $1+k^2=2$.

Conclusion. Les fonctions constantes solutions du problème sont celles égales à 0, à 1 ou à -1.

4/ On suppose que f est solution. Donner sans justification les valeurs possibles de $f(0)$.

Si f est solution du problème, alors $f(0) = \dfrac{2f(0)}{1+f(0)^2}$.

Conclusion. Selon les calculs de la question précédente : $f(0) \in \{-1, 0, 1\}$

5/ Montrer que si f est solution, on a :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \; -1 \leqslant f(x) \leqslant 1$$

(*on pourra exprimer* $f(x)$ *en fonction de* $f(x/2)$).

Soit x un réel. On a d'après l'énoncé : $f(x) = \dfrac{2f(x/2)}{1+f(x/2)^2} = H(f(x/2))$. Or H est à valeurs dans $[-1,1]$ d'après la question 2. Par suite : $H(x) \in [-1,1]$.

Conclusion. Si f est solution, alors : $\quad \forall\, x \in \mathbb{R}, \; -1 \leqslant f(x) \leqslant 1$

6/ Montrer que si f est solution, alors $(-f)$ est également solution.

Supposons que f soit solution du problème posé. Alors pour tout réel x : $(-f)(2x) = \dfrac{2 \times (-f)(x)}{1 + ((-f)(x))^2}$. Donc $-f$ est également solution.

Conclusion. f est solution $\Longrightarrow -f$ est solution

7/ **Dans cette question, on suppose que f est une solution du problème posé, que $f(0) = 1$, et que f n'est pas constante.**

On considère $x_0 \in \mathbb{R}$, tel que $f(x_0) \neq f(0)$, et on définit la suite (u_n) en posant : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = f\left(\dfrac{x_0}{2^n}\right)$.

a/ Montrer que la suite (u_n) est convergente, et préciser sa limite.

La suite de terme général $\dfrac{x_0}{2^n}$ converge évidemment vers 0. Puisque f est continue (car dérivable) en 0, la propriété de continuité séquentielle implique que : $\lim\limits_{n\to+\infty} f\left(\dfrac{x_0}{2^n}\right) = f(0)$.

Conclusion. D'après ce qui précède : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$

b/ Etablir une relation entre u_n et u_{n+1} ; en déduire que la suite (u_n) garde un signe constant, puis étudier sa monotonie suivant le signe de u_0.

Soit n un entier naturel. On a : $u_n = f\left(\dfrac{x_0}{2^n}\right) = f\left(2\,\dfrac{x_0}{2^{n+1}}\right) = \dfrac{2f\left(\dfrac{x_0}{2^{n+1}}\right)}{1 + \left(f\left(\dfrac{x_0}{2^{n+1}}\right)\right)^2} = \dfrac{2u_{n+1}}{1 + u_{n+1}^2}$.

En résumé : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{2u_{n+1}}{1 + u_{n+1}^2}}$.

Puisque $1 + u_{n+1}^2 > 0$, on en déduit que u_n et u_{n+1} sont de même signe.

Par ailleurs, pour tout entier naturel n on a : $u_{n+1} - u_n = u_{n+1} - \dfrac{2u_{n+1}}{1 + u_{n+1}^2} = \dfrac{u_{n+1}^3 - u_{n+1}}{1 + u_{n+1}^2} = \dfrac{u_{n+1}^2 - 1}{1 + u_{n+1}^2}\, u_{n+1}$.

En résumé : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_{n+1}^2 - 1}{1 + u_{n+1}^2}\, u_{n+1}$. Puisque la fonction f est à valeurs dans $[-1, 1]$, on en déduit que : $\dfrac{u_{n+1}^2 - 1}{1 + u_{n+1}^2} \leqslant 0$. Il s'ensuit que $u_{n+1} - u_n$ est du signe opposé à u_{n+1}, càd du signe opposé à u_0 puisque la suite (u_n) est de signe constant.

Conclusion. La suite (u_n) est de signe constant, et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{2u_{n+1}}{1 + u_{n+1}^2}$

Si $u_0 \geqslant 0$, alors la suite (u_n) est décroissante ; sinon la suite (u_n) est croissante.

c/ En utilisant ce qui précède, aboutir à une contradiction. En déduire l'ensemble des fonctions f solutions du problème telles que $f(0) = 1$.

La fonction f étant à valeurs dans $[-1, 1]$, et puisque l'on fait l'hypothèse que $u_0 \neq 1$, on a donc $u_0 \in [-1, 1[$. Distinguons deux cas.

➤ <u>1er cas : si $u_0 \in [-1, 0[$</u>. Alors la suite (u_n) est à termes négatifs (d'après la question b), donc ne peut converger vers 1 (question a) : contradiction.

➤ <u>2ème cas : si $u_0 \in [0, 1[$</u>. Alors la suite (u_n) est décroissante (question b) et majorée par u_0, qui est strictement inférieur à 1. Donc (u_n) ne peut converger vers 1 (question a) : contradiction.

Les deux cas conduisent à une contradiction.

Conclusion. Il n'existe pas de solution f non constante du problème telle que $f(0) = 1$.

d/ Que peut-on conclure si l'hypothèse "$f(0) = 1$" est remplacée par l'hypothèse "$f(0) = -1$" ?

Par ailleurs, s'il existait une solution f non constante du problème telle que $f(0) = -1$, alors la fonction $(-f)$ serait également solution du problème (question 6), et vérifierait $(-f)(0) = 1$; ce qui ne peut se produire d'après la question précédente.

Conclusion. La seule fonction f solution du problème vérifiant $f(0) = 1$ (*resp.* $f(0) = -1$) est la fonction constante égale à 1 (*resp.* à -1).

8/ Dans cette question, on suppose que f est une solution du problème posé, et que $f(0) = 0$.

a/ Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq -1$ et $f(x) \neq 1$.

On définit alors une fonction g en posant : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = G(f(x))$, où G désigne la fonction introduite dans la question 1.

Raisonnons par l'absurde, et supposons qu'il existe un réel x_0 tel que $f(x_0) = 1$. On pose alors pour tout entier naturel n : $u_n = f\left(\dfrac{x_0}{2^n}\right)$. Alors la suite (u_n) converge vers $f(0) = 0$ (même raisonnement que dans la question 7-a). Or le calcul effectué dans la question 7-b montre que la suite (u_n) est constante égale à 1 (puisque $u_0 = 1$) : contradiction.

Il n'existe donc pas de réel x_0 tel que $f(x_0) = 1$. En utilisant le résultat de la question 6, on peut également affirmer qu'il n'existe pas de réel x_0 tel que $f(x_0) = -1$.

Conclusion. La fonction f est à valeurs dans $]-1, 1[$.

b/ Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(2x) = 2g(x)$.

Soit x un réel. On a :

$$g(2x) = G(f(2x)) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+f(2x)}{1-f(2x)}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\left(\frac{1+f(x)}{1-f(x)}\right)^2\right) = \ln\left(\frac{1+f(x)}{1-f(x)}\right) = 2G(f(x)) = 2g(x)$$

Conclusion. $\forall x \in \mathbb{R},\ g(2x) = 2g(x)$

c/ Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On définit une suite (v_n) en posant : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \dfrac{g\left(\dfrac{x}{2^n}\right)}{\left(\dfrac{x}{2^n}\right)}$.

Etablir que la suite (v_n) est convergente et préciser sa limite.

On peut commencer par montrer que g est continue en 0, et un peu plus.
En effet, la fonction f est dérivable en 0 (par hypothèse), et la fonction G est dérivable en $0 = f(0)$ (TG).

On en déduit que la fonction $g = G \circ f$ est dérivable en 0, et que $g'(0) = f'(0)$. En particulier, g est continue en 0.

Par ailleurs, la suite de terme général $\dfrac{x}{2^n}$ converge vers 0. D'après la propriété de continuité séquentielle, la suite de terme général $g\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$ converge vers $g(0)$.

Conclusion. D'où par limite séquentielle : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{g\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\left(\frac{x}{2^n}\right)} = g'(0)$

d/ En déduire que g est linéaire.

Soit x un réel. Pour tout entier n on a : $v_n = \dfrac{g\left(\dfrac{x}{2^n}\right)}{\left(\dfrac{x}{2^n}\right)} = \dfrac{g\left(2\times\dfrac{x}{2^{n+1}}\right)}{\left(2\times\dfrac{x}{2^{n+1}}\right)} = \dfrac{g\left(\dfrac{x}{2^{n+1}}\right)}{\left(\dfrac{x}{2^{n+1}}\right)} = v_{n+1}$.

Ainsi la suite (v_n) est constante. Or, d'après la question précédente elle converge vers $g'(0)$. Donc la suite (v_n) est constante égale à $g'(0)$. En particulier : $v_0 = g(x)/x = g'(0)$.

Cette relation étant valable pour tout réel x, on a : $\forall x \in \mathbb{R},\ \dfrac{g(x)}{x} = g'(0)$, d'où : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = g'(0)x$.

Conclusion. Si f est une solution du problème telle que $f(0) = 0$, alors $G \circ f$ est linéaire.

9/ Synthèse. Déterminer toutes les fonctions solutions du problème posé.

D'après ce qui précède, si f est une solution du problème telle que $f(0)=0$, alors il existe un réel α tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ G(f(x)) = \alpha x \Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = F(\alpha x)$$

On vérifie sans trop de peine la réciproque : la fonction $f_\alpha : x \in \mathbb{R} \longmapsto F(\alpha x)$ est effectivement solution du problème.

Conclusion. Les solutions du problème sont les fonctions constantes sur $\mathbb{R}$ égale à ± 1, et les fonctions $f_\alpha : x \in \mathbb{R} \longmapsto F(\alpha x)$ (pour tout réel α).

—— Problème 2 — Calcul matriciel et suite de Fibonacci ——

1/ On note $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Justifier brièvement que : $-\dfrac{1}{\varphi} = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Les racines du polynôme $X^2 - X - 1$ sont $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\psi = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

On a : $\varphi\psi = -1$ (relations coefficients-racines). D'où : $\psi = -\varphi^{-1}$

Conclusion. $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = -\dfrac{1}{\varphi}$ avec $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

Partie 1 - Puissances d'une matrice (première tentative)

Dans cette partie, on considère la matrice de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

On pose :

$$A = C + B \qquad \text{avec} \quad C = \mathrm{diag}(1,0) \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2/ On note $\mathrm{COM}(C)$ le commutant de la matrice C, càd l'ensemble des matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec C :

$$\mathrm{COM}(C) = \{M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}),\quad MC = CM\}$$

Etablir que $(\mathrm{COM}(C),+)$ est un sous-groupe de $(\mathrm{M}_2(\mathbb{R}),+)$.

C'est l'exo 6 de la feuille de TD sur le calcul matriciel.

Il suffit donc de connaître le cours, et de vérifier les quatre axiomes assurant que $(\mathrm{COM}(C),+)$ est un sous-groupe de $(\mathrm{M}_2(\mathbb{R}),+)$.

Les axiomes SG1 ($\mathrm{COM}(C) \subset \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$) et SG2 ($0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})} \in \mathrm{COM}(C)$) sont vrais pour des raisons qu'il serait oiseux de développer.

Il est à peine moins superfétatoire de vérifier que $\mathrm{COM}(C)$ est stable par somme (SG3) :

Si M et $N \in \mathrm{COM}(C)$, alors : $(M+N)A = MA + NA = AM + AN = A(M+N)$.

D'où : $(M+N) \in \mathrm{COM}(C)$

Enfin, un lumineux raisonnement assure que $\mathrm{COM}(C)$ est stable par passage à l'opposé (SG4) :

$$\text{Si } M \in \mathrm{COM}(C), \text{ alors : } (-M)A = -(MA) = -(AM) = A \times (-M). \text{ D'où : } (-M) \in \mathrm{COM}(C)$$

Conclusion. $\mathrm{COM}(C)$ est une partie de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, contenant $0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}$ (l'élément neutre pour l'addition dans $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$), stable par somme et par passage à l'opposé. Il s'ensuit que $(\mathrm{COM}(C),+)$ est un sous-groupe de $(\mathrm{M}_2(\mathbb{R}),+)$

3/ $(\mathrm{COM}(C), \times)$ est-il un sous-groupe de $(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}), \times)$?

Accrochons nos ceintures : la matrice nulle appartient à $\mathrm{COM}(C)$, mais n'est pas inversible.

Il s'ensuit que : $\mathrm{COM}(C) \not\subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ (l'axiome (SG1) n'est pas vérifié).

Conclusion. $(\mathrm{COM}(C), \times)$ n'est pas un sous-groupe de $(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}), \times)$.

4/ Déterminer explicitement le commutant $\mathrm{COM}(C)$ de la matrice C.

Soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$. On a : $CM = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $MC = \begin{pmatrix} x & 0 \\ z & 0 \end{pmatrix}$

Par suite : $[M \in \mathrm{COM}(C)] \Longleftrightarrow [CM = MC] \Longleftrightarrow [y = 0 \wedge z = 0]$

Conclusion. $\mathrm{COM}(C) = \mathrm{D}_2(\mathbb{R})$

5/ Comparer $(C+B)^2$ et $C^2 + 2CB + B^2$. Le résultat était-il prévisible ?

D'une part : $(C+B)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. D'autre part : $C^2 + 2CB + B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Conclusion. Ainsi : $(C+B)^2 \neq C^2 + 2CB + B^2$. Le résultat était prévisible car d'après la question précédente, les matrices B et C ne commutent pas, et on ne peut donc pas appliquer le binôme de Newton pour calculer $(C+B)^2$ (on ne peut qu'affirmer : $(C+B)^2 = C^2 + CB + BC + B^2$).

Partie 2 - Puissances d'une matrice (seconde tentative)

Dans cette partie, on considère les matrices de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad D = \mathrm{diag}\left(\varphi, -\frac{1}{\varphi}\right) \qquad \text{et} \qquad P = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{5} & 1-\sqrt{5} \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

6/ Justifier que P est inversible, et calculer son inverse.

On a : $\det(P) = 4\sqrt{5} \neq 0$. **Conclusion**. $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et d'après le cours : $P^{-1} = \dfrac{1}{4\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1+\sqrt{5} \\ -2 & 1+\sqrt{5} \end{pmatrix}$

7/ Vérifier que : $\quad P^{-1}AP = D$

Après un calcul aisé : $P^{-1}AP = D$.

8/ Etablir que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = PD^nP^{-1}$

D'après la question précédente : $A = PDP^{-1}$. La récurrence bien connue fournit la conclusion.

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = PD^nP^{-1}$

Partie 3 - Suite de Fibonacci et calcul matriciel

Jusqu'à la fin de ce problème, on considère la suite $(\mathbf{F}_n)$ définie en posant :

$$\mathbf{F}_0 = 0\,; \qquad \mathbf{F}_1 = 1\,; \qquad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{F}_{n+2} = \mathbf{F}_{n+1} + \mathbf{F}_n$$

La suite $(\mathbf{F}_n)$ est la suite de Fibonacci, dont les premiers termes sont :

$$\mathbf{F}_0 = 0\,; \quad \mathbf{F}_1 = 1\,; \quad \mathbf{F}_2 = 1\,; \quad \mathbf{F}_3 = 2\,; \quad \mathbf{F}_4 = 3\,; \quad \mathbf{F}_5 = 5\,; \quad \mathbf{F}_6 = 8\,; \quad \mathbf{F}_7 = 13\,; \quad \mathbf{F}_8 = 21\ldots$$

Pour tout entier naturel n, on pose : $\qquad X_n = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_{n+1} \\ \mathbf{F}_n \end{pmatrix}$

9/ Etablir qu'il existe une matrice $Q \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, que l'on explicitera, telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_{n+1} = QX_n$$

Pour tout entier naturel n, on a :

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_{n+2} \\ \mathbf{F}_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_{n+1} + \mathbf{F}_n \\ \mathbf{F}_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \mathbf{F}_{n+1} \\ \mathbf{F}_n \end{pmatrix} = AX_n$$

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N}, \; X_{n+1} = AX_n$ (ainsi : $Q = A$ *)

10/ Etablir que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = Q^n X_0$

Récurrence immédiate.

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = A^n X_0$ (puisque $A = Q$ d'après la question précédente).

11/ En déduire l'expression de $\mathbf{F}_n$ en fonction de n *(on pourra utiliser des résultats de la partie 2)*.

Soit n un entier naturel. D'après la question précédente : $X_n = A^n X_0$.

D'après l'énoncé : $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

D'après la question 8 : $A^n = PD^nP^{-1}$.

Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned}
& X_n = PD^nP^{-1}X_0 \\
\Longleftrightarrow\; & X_n = \frac{1}{4\sqrt{5}} PD^n \begin{pmatrix} 2 & -1+\sqrt{5} \\ -2 & 1+\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\Longleftrightarrow\; & X_n = \frac{1}{4\sqrt{5}} P \begin{pmatrix} \varphi^n & 0 \\ 0 & \dfrac{(-1)^n}{\varphi^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} \\
\Longleftrightarrow\; & X_n = \frac{1}{4\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{5} & 1-\sqrt{5} \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\varphi^n \\ -2 \times \dfrac{(-1)^n}{\varphi^n} \end{pmatrix} \\
\Longleftrightarrow\; & \begin{pmatrix} \mathbf{F}_{n+1} \\ \mathbf{F}_n \end{pmatrix} = \frac{1}{4\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{5} & 1-\sqrt{5} \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\varphi^n \\ -2 \times \dfrac{(-1)^n}{\varphi^n} \end{pmatrix} \\
\Longrightarrow\; & \mathbf{F}_n = \frac{1}{4\sqrt{5}} \left(4\varphi^n - 4 \times \frac{(-1)^n}{\varphi^n} \right)
\end{aligned}$$

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{F}_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \left(\varphi^n - \dfrac{(-1)^n}{\varphi^n} \right)$

Partie 4 - Suite de Fibonacci et fonction arctangente

12/ Etablir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{F}_{n+1}^2 - \mathbf{F}_n\mathbf{F}_{n+2} = (-1)^n$$

Pour tout entier naturel n, notons $P(n)$ l'assertion : "$\mathbf{F}_{n+1}^2 - \mathbf{F}_n\mathbf{F}_{n+2} = (-1)^n$"

Selon l'énoncé, $P(0)$ est vraie.

Supposons que $P(n)$ est vraie pour un certain entier naturel n. Alors :

$$\mathbf{F}_{n+2}^2 - \mathbf{F}_{n+1}\mathbf{F}_{n+3} = \mathbf{F}_{n+2}^2 - \mathbf{F}_{n+1}(\mathbf{F}_{n+1} + \mathbf{F}_{n+2}) = \mathbf{F}_{n+2}^2 - \mathbf{F}_{n+1}^2 - \mathbf{F}_{n+1}\mathbf{F}_{n+2}$$

*. C'est une incroyable surprise.

D'où, par hypothèse de récurrence :

$$\mathbf{F}_{n+2}^2 - \mathbf{F}_{n+1}\mathbf{F}_{n+3} = \mathbf{F}_{n+2}^2 - (-1)^n - \mathbf{F}_n\mathbf{F}_{n+2} - \mathbf{F}_{n+1}\mathbf{F}_{n+2} = \mathbf{F}_{n+2}^2 - (-1)^n - \mathbf{F}_{n+2}\left(\mathbf{F}_n + \mathbf{F}_{n+1}\right)$$

Ainsi : $\mathbf{F}_{n+2}^2 - \mathbf{F}_{n+1}\mathbf{F}_{n+3} = (-1)^{n+1} + \mathbf{F}_{n+2}^2 - \mathbf{F}_{n+2}^2$. Finalement : $\mathbf{F}_{n+2}^2 - \mathbf{F}_{n+1}\mathbf{F}_{n+3} = (-1)^{n+1}$.
Ce qui signifie que $P(n+1)$ est vraie. Récurrence établie.

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{F}_{n+1}^2 - \mathbf{F}_n\mathbf{F}_{n+2} = (-1)^n$

13/ A l'aide de la question précédente, établir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \arctan\left(\frac{1}{\mathbf{F}_{2n}}\right) = \arctan\left(\frac{1}{\mathbf{F}_{2n+1}}\right) + \arctan\left(\frac{1}{\mathbf{F}_{2n+2}}\right)$$

Indication : on n'utilisera surtout pas un raisonnement par récurrence.

Soit n un entier naturel non nul. On a :

$$\tan\left(\arctan\left(\frac{1}{\mathbf{F}_{2n+1}}\right) + \arctan\left(\frac{1}{\mathbf{F}_{2n+2}}\right)\right) = \frac{\dfrac{1}{\mathbf{F}_{2n+1}} + \dfrac{1}{\mathbf{F}_{2n+2}}}{1 - \dfrac{1}{\mathbf{F}_{2n+1}} \times \dfrac{1}{\mathbf{F}_{2n+2}}} = \frac{\mathbf{F}_{2n+1} + \mathbf{F}_{2n+2}}{\mathbf{F}_{2n+1}\mathbf{F}_{2n+2} - 1} = \frac{\mathbf{F}_{2n+1} + \mathbf{F}_{2n+2}}{\mathbf{F}_{2n+1}\mathbf{F}_{2n+2} - 1}$$

Or, selon la question précédente : $\mathbf{F}_{2n}\mathbf{F}_{2n+2} = \mathbf{F}_{2n+1}^2 - 1$.
Muni de cette remarque, on reprend les calculs précédents en écrivant diaboliquement :

$$\tan\left(\arctan\left(\frac{1}{\mathbf{F}_{2n+1}}\right) + \arctan\left(\frac{1}{\mathbf{F}_{2n+2}}\right)\right) = \frac{\mathbf{F}_{2n+1} + \mathbf{F}_{2n+2}}{\mathbf{F}_{2n+1}\mathbf{F}_{2n+2} - 1} \times \frac{\mathbf{F}_{2n}}{\mathbf{F}_{2n}} = \frac{1}{\mathbf{F}_{2n}} \times \frac{\mathbf{F}_{2n}\mathbf{F}_{2n+1} + \mathbf{F}_{2n}\mathbf{F}_{2n+2}}{\mathbf{F}_{2n+1}\mathbf{F}_{2n+2} - 1}$$

$$= \frac{1}{\mathbf{F}_{2n}} \times \frac{\mathbf{F}_{2n}\mathbf{F}_{2n+1} + \mathbf{F}_{2n+1}^2 - 1}{\mathbf{F}_{2n+1}\mathbf{F}_{2n+2} - 1} = \frac{1}{\mathbf{F}_{2n}} \times \frac{\mathbf{F}_{2n+1}\left(\mathbf{F}_{2n} + \mathbf{F}_{2n+1}\right) - 1}{\mathbf{F}_{2n+1}\mathbf{F}_{2n+2} - 1} = \frac{1}{\mathbf{F}_{2n}} \times \frac{\mathbf{F}_{2n+1}\mathbf{F}_{2n+2} - 1}{\mathbf{F}_{2n+1}\mathbf{F}_{2n+2} - 1} = \frac{1}{\mathbf{F}_{2n}}$$

Il s'ensuit que : $\tan\left(\arctan\left(\frac{1}{\mathbf{F}_{2n+1}}\right) + \arctan\left(\frac{1}{\mathbf{F}_{2n+2}}\right)\right) = \tan\left(\arctan\left(\frac{1}{\mathbf{F}_{2n}}\right)\right)$

Par conséquent : $\arctan\left(\frac{1}{\mathbf{F}_{2n+1}}\right) + \arctan\left(\frac{1}{\mathbf{F}_{2n+2}}\right) = \arctan\left(\frac{1}{\mathbf{F}_{2n}}\right) \quad [\pi]$

Pour s'affranchir du "modulo π", il reste à observer que $\arctan\left(\frac{1}{\mathbf{F}_k}\right)$ appartient à $[0, \pi/4]$ à partir de $k = 1$ (notamment car la suite de Fibonacci est croissante, que $\mathbf{F}_1 = 1$, et que $\arctan(1) = \pi/4$).

On en déduit que les réels $\arctan\left(\frac{1}{\mathbf{F}_{2n+1}}\right) + \arctan\left(\frac{1}{\mathbf{F}_{2n+2}}\right)$ et $\arctan\left(\frac{1}{\mathbf{F}_{2n}}\right)$ appartiennent tous deux à $[0, \pi/2]$.

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \arctan\left(\frac{1}{\mathbf{F}_{2n}}\right) = \arctan\left(\frac{1}{\mathbf{F}_{2n+1}}\right) + \arctan\left(\frac{1}{\mathbf{F}_{2n+2}}\right)$

14/ Etablir que :

$$\arctan\left(\frac{1}{3}\right) = \arctan\left(\frac{1}{5}\right) + \arctan\left(\frac{1}{13}\right) + \arctan\left(\frac{1}{34}\right) + \arctan\left(\frac{1}{55}\right)$$

D'après la question précédente : $\arctan\left(\frac{1}{\mathbf{F}_4}\right) = \arctan\left(\frac{1}{\mathbf{F}_5}\right) + \arctan\left(\frac{1}{\mathbf{F}_6}\right)$

Il s'ensuit que : $\arctan\left(\frac{1}{3}\right) = \arctan\left(\frac{1}{5}\right) + \arctan\left(\frac{1}{8}\right)$

Or, d'après la question précédente : $\arctan\left(\frac{1}{\mathbf{F}_6}\right) = \arctan\left(\frac{1}{\mathbf{F}_7}\right) + \arctan\left(\frac{1}{\mathbf{F}_8}\right)$

Il s'ensuit que : $\arctan\left(\frac{1}{8}\right) = \arctan\left(\frac{1}{13}\right) + \arctan\left(\frac{1}{21}\right)$

Or, d'après la question précédente : $\arctan\left(\frac{1}{\mathbf{F}_8}\right) = \arctan\left(\frac{1}{\mathbf{F}_9}\right) + \arctan\left(\frac{1}{\mathbf{F}_{10}}\right)$

Il s'ensuit que : $\arctan\left(\frac{1}{21}\right) = \arctan\left(\frac{1}{34}\right) + \arctan\left(\frac{1}{55}\right)$

La conclusion provient des 3 relations établies ci-dessus.

Conclusion. $\arctan\left(\frac{1}{3}\right) = \arctan\left(\frac{1}{5}\right) + \arctan\left(\frac{1}{13}\right) + \arctan\left(\frac{1}{34}\right) + \arctan\left(\frac{1}{55}\right)$

Partie 5 - Suite de Fibonacci et Python

15/ Ecrire le script Python d'une fonction `Fibo(n)` qui reçoit comme paramètre un entier naturel `n`, et qui renvoie la valeur de $\mathbf{F}_{\mathtt{n}}$.

Une fonction **itérative** répondant à la question :

```
def FIBO(n):
    u, v =0, 1
    if n ==0:
        return u
    elif n ==1:
        return v
    else :
        for k in range(n):
            u, v =v, u+v
        return u
```

Une fonction **récursive** répondant à la question :

```
def FI(n):
    if n in [0,1]:
        return n
    else :
        return FI(n-1) +FI(n-2)
```

16/ Dans cette question, on admet que la suite de Fibonacci est croissante. Ecrire le script Python d'une fonction `Over(val)` qui reçoit comme paramètre un flottant `val`, et qui renvoie le plus petit entier naturel p tel que $\mathbf{F}_p >$`val`.

```
def Over(val):
    p =0
    while Fibo(p) <=val:
        p +=1
    return p
```