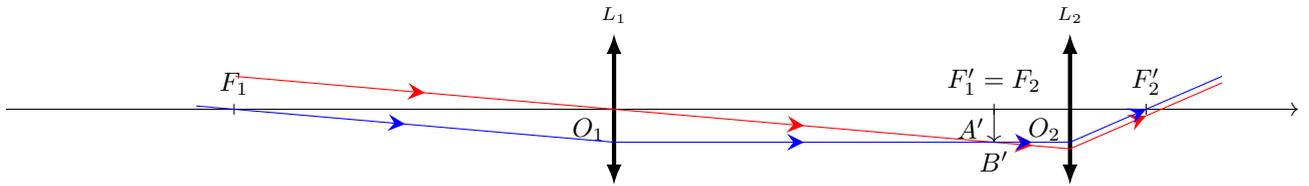


CB1 du 20/01 : Physique (4h)

Solution de l'exercice 1 : Lunette astronomique

Q.1 Afocal : ne possède pas de foyer. \implies On en déduit que $\overline{F_1'F_2} = 0 \implies \boxed{F_1' = F_2}$.

Q.2 Soit le schéma :



Q.3 Le capteur CCD doit être placé au niveau de l'image intermédiaire $A_1B_1 \implies$ dans le plan focal image de L_1 .

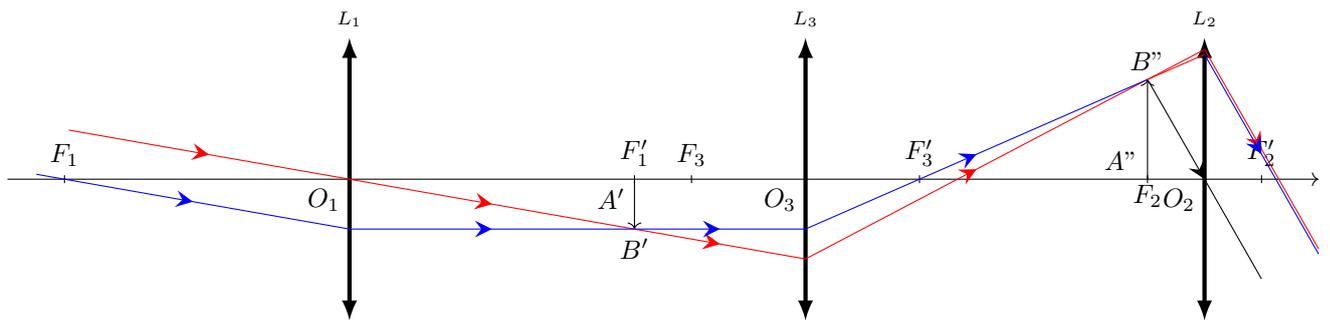
Q.4 On voit sur le schéma que α' et α sont orientés dans des sens contraires. \implies L'image est inversée.

Q.5 Soit $\tan \alpha' = \frac{\overline{A'B'}}{-f_2'} \approx \alpha'$. Soit $\tan \alpha = \frac{\overline{A'B'}}{f_1'} \approx \alpha \implies \boxed{G = -\frac{f_1'}{f_2'} = 5}$.

Q.6 L_3 doit conjuguer F_1' et F_2 .

Q.7 Soit $\gamma_3 = \frac{\overline{O_3F_2}}{\overline{O_3F_1'}}$ et $\frac{1}{O_3F_2} - \frac{1}{O_3F_1'} = \frac{1}{f_3'}$. On en déduit que : $\boxed{\overline{O_3F_1'} = \frac{f_3'}{\gamma_3}(1 - \gamma_3)}$

Q.8 Soit le schéma :



Q.9 Soit $\tan \alpha' = \frac{\overline{A''B''}}{-f_2'} \approx \alpha'$. Soit $\tan \alpha = \frac{\overline{A'B'}}{f_1'} \approx \alpha \implies \boxed{G' = \gamma_3 G}$

On a donc inversion du signe du grossissement si $\gamma_3 < 0$, et augmentation de la valeur absolue si $|\gamma_3| > 1$.

Solution de l'exercice 2 : Filtre linéaire d'ordre 2

Q.1 Schéma électrique équivalent en BF :

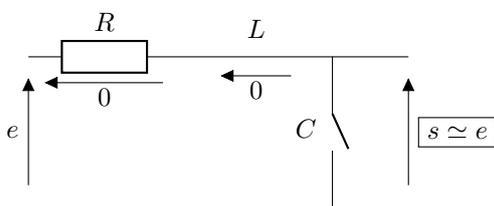
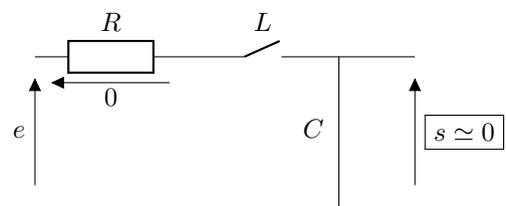
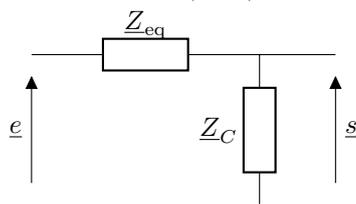


Schéma électrique équivalent en HF :



Conclusion : C'est un filtre passé-bas.

Q.2 En régime sinusoïdal forcé (RSF), on a le schéma électrique équivalent où il apparaît un pont diviseur de tension :



$$\underline{s}(t) = \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_{eq}} \underline{e}(t) = \frac{1}{1 + \frac{\underline{Z}_{eq}}{\underline{Z}_C}} \underline{e}(t)$$

$$\underline{s}(t) = \frac{1}{1 + j\omega C(R + j\omega L)} \underline{e}(t) \quad \text{avec } \underline{Z}_{eq} = R + j\omega L$$

$$\underline{s}(t) = \frac{1}{1 - LC\omega^2 + j\omega RC} \underline{e}(t)$$

par définition : $\boxed{\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}(t)}{\underline{e}(t)} = \frac{1}{1 - LC\omega^2 + j\omega RC}}$ Filtre d'ordre 2

On pose alors : $\left\{ \begin{array}{l} \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \implies \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ Q = \frac{1}{\omega_0 RC} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \end{array} \right.$ pour réécrire : $\underline{H}(jx) = \frac{1}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}$ avec $x = \frac{\omega}{\omega_0}$

Q.3 On en déduit alors le gain linéaire $G(x)$ et le déphasage $\varphi(x)$ introduit par le filtre à la pulsation réduite x :

$$G(x) = |\underline{H}(jx)| = \frac{1}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2}}$$

$$\varphi(x) = \arg(\underline{H}(jx)) \implies \varphi(x) = \arg(1) - \arg(1 - x^2 + jx/Q) = \arg(1 - x^2 - jx/Q) = \arg(-j(x/Q + j(1 - x^2)))$$

$$\varphi(x) = \arg(-j) + \arg(x/Q + j(1 - x^2)) \implies \varphi(x) = -\frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{1 - x^2}{x/Q}\right)$$

Q.4 Tableau des équivalents de $\underline{H}(jx)$ qui donne les équations des asymptotes :

	$\underline{H} = \frac{1}{1 - x^2 + jx/Q}$	$G(x)$	$G_{dB} = 20 \log(G)$	$\varphi(x)$
BF $x \ll 1$	$\simeq \frac{1}{1} = 1$	1	0	0
HF $x \gg 1$	$\simeq \frac{1}{-x^2}$	$\frac{1}{x^2}$	$\simeq -40 \log(x)$	$\simeq -\pi$
$x = 1$	$= -jQ$	Q	$20 \log(Q)$	$-\frac{\pi}{2}$

En BF : La droite d'équation $G_{dB} = 0$ est asymptote et la droite d'équation $\varphi = 0$ est asymptote.

En HF : La droite d'équation $G_{dB} = -40 \log(x)$ est asymptote et la droite d'équation $\varphi = -\pi$ est asymptote.

Q.5 Le tableau précédent nous apprend que $\varphi(x = 1) = \varphi(\omega = \omega_0) = -\frac{\pi}{2}$. On relève alors graphiquement la pulsation propre ω_0 du filtre :

$$\omega_0 \simeq 1000 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

Q.6 Il s'agit d'étudier ici l'action du filtre linéaire RLC série sur un signal d'entrée périodique en exploitant les diagramme de Bode.

Par linéarité du filtre étudié, le signal de sortie s'exprime selon :

$$s(t) = e_0 G\left(\frac{\omega_0}{10}\right) \cos\left(\frac{\omega_0}{10}t + \varphi\left(\frac{\omega_0}{10}\right)\right) + e_0 G(\omega_0) \cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2} + \varphi(\omega_0)\right)$$

où les valeurs de gain et déphasage sont obtenues graphiquement sur les diagrammes de Bode.

Relevés pour $\omega = \frac{\omega_0}{10} = 100 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

$$G_{dB}\left(\frac{\omega_0}{10}\right) \simeq 0 \text{ dB} \implies G\left(\frac{\omega_0}{10}\right) = 1$$

$$\varphi\left(\frac{\omega_0}{10}\right) \simeq -\frac{\pi}{10}$$

Relevés pour $\omega = \omega_0 = 1000 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

$$G_{dB}(\omega_0) \simeq -10 \text{ dB} \implies G(\omega_0) = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\varphi(\omega_0) \simeq -\frac{\pi}{2}$$

Bilan : Expression numérique approchée du signal de sortie :

$$s(t) = e_0 G \cos\left(\frac{\omega_0}{10}t - \frac{\pi}{10}\right) + 0,32e_0 \cos(\omega_0 t)$$

Solution de l'exercice 3 : Étude d'un accéléromètre de smartphone

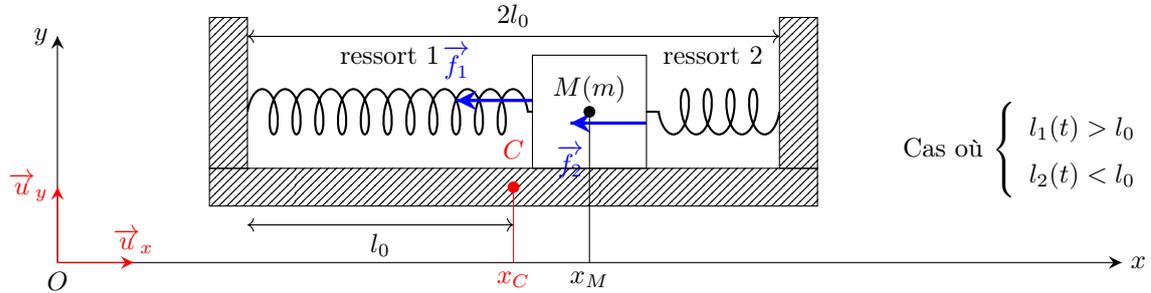
Q.1 On exprime la loi de Hooke pour les deux ressorts identiques (k, l_0) :

→ pour le ressort 1 : $\vec{f}_1 = -k(l_1(t) - l_0)\vec{u}_{O \rightarrow M}$ avec $\begin{cases} \vec{u}_{O \rightarrow M} = \vec{u}_x \\ l_1(t) = l_0 + X(t) \end{cases}$

d'où $\vec{f}_1 = -kX(t)\vec{u}_x$

→ pour le ressort 2 : $\vec{f}_2 = -k(l_2(t) - l_0)\vec{u}_{O' \rightarrow M}$ avec $\begin{cases} \vec{u}_{O' \rightarrow M} = -\vec{u}_x \\ l_2(t) = l_0 - X(t) \end{cases}$

d'où $\vec{f}_2 = -kX(t)\vec{u}_x$



On en déduit la résultante $\vec{f}_1 + \vec{f}_2 = -2kX(t)\vec{u}_x$

- Q.2** **Système :** $\{M(m)\}$ accéléromètre assimilé à un point matériel.
Référentiel : Terrestre \mathcal{R}_T supposé galiléen à l'échelle de l'expérience.
Coordonnées : Cartésiennes unidimensionnel selon l'axe (Ox)
Bilan des forces :

- $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u}_y = \vec{C}^{te}$
- $\vec{R}_N = \|\vec{R}_N\|\vec{u}_y$
- $\vec{f}_1 = -kX(t)\vec{u}_x$
- $\vec{f}_2 = -kX(t)\vec{u}_x$
- $\vec{f}_3 = -\alpha(x_M - x_C)\vec{u}_x$

Principe fondamental de la dynamique : $m\vec{a}(M)_{\mathcal{R}_T} = \vec{P} + \vec{R}_N + \vec{f}_1 + \vec{f}_2 + \vec{f}_3$

où $\vec{a}(M)_{\mathcal{R}_T} = x_M''\vec{u}_x$ repérage cartésien selon l'axe du mouvement.

On a alors : $m\ddot{x}_M = -2kX(t) - \alpha(x_M - x_C) \iff m(\dot{x}_C + \ddot{X}) = -2kX(t) - \alpha\dot{X}$ car $X(t) = x_M(t) - x_C(t)$

$\iff m\ddot{X} + \alpha\dot{X} + 2kX(t) = -m\dot{x}_C \implies \ddot{X} + \frac{\alpha}{m}\dot{X} + \frac{2k}{m}X(t) = -a_C$

avec $a_C = \dot{x}_C$, on pose $\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$ et $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{\alpha}{m} \iff Q = \frac{\sqrt{2km}}{\alpha}$.

- Q.3** → $\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$ est la pulsation propre de l'oscillateur mécanique en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$ telle que $[\omega_0] = T^{-1}$ pulsation du système en l'absence de frottements.

→ $Q = \frac{\sqrt{2km}}{\alpha}$ est le facteur de qualité du système, sans unité, inversement proportionnel au coeff de frottements.

- Q.4** Au signal réel $X(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$ est associé le signal complexe :

$$\underline{X}(t) = X_m e^{j(\omega t + \varphi)} = \underline{X}_m e^{j\omega t}$$

où $\underline{X}_m = X_m e^{j\varphi}$ est l'amplitude complexe de la réponse en RSF. On réécrit l'EDL₂ en notation complexes :

$$\ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{X} + \omega_0^2 X = -a_C \iff \left(\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega\omega_0}{Q}\right)\underline{X}(t) = -a_C \iff \underline{X}_m = \frac{-a_m}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega\omega_0}{Q}}$$

où $\underline{a}_C = a_m e^{j\omega t}$. On pose ensuite $u = \frac{\omega}{\omega_0}$ pour réécrire :

$$\underline{X}_m(ju) = \frac{-a_m/\omega_0^2}{1 - u^2 + j\frac{u}{Q}}$$

amplitude complexe de la réponse en RSF en élongation. On en déduit alors l'amplitude réelle :

$$X_m(u) = |X_m(ju)| = \frac{am/\omega_0^2}{\sqrt{(1-u^2)^2 + \left(\frac{u}{Q}\right)^2}}$$

Q.5 À la résonance, l'amplitude réelle de la réponse en élongation passe par un maximum càd la fonction $X_m(u)$ passe par un maximum si la fonction $g(u) = (1-u^2)^2 + \left(\frac{u}{Q}\right)^2$ passe par un minimum telle que $X_m(u) = \frac{a_m}{\omega_0 \sqrt{g(u)}}$ d'où X_m et g varient de façon opposées !
On résout alors $g'(u_r) = 0$:

$$\iff -2u_r \times 2 \times (1-u_r^2) + \frac{2u_r}{Q^2} = 0 \iff 2u_r \left[\frac{1}{Q^2} - 2(1-u_r^2) \right] = 0 \iff \begin{cases} u_r = 0 \text{ exclu car } u_r > 0 \\ u_r^2 = 1 - \frac{1}{2Q^2} \end{cases}$$

Il faut forcément que $u_r^2 > 0 \iff 1 > \frac{1}{2Q^2} \iff Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$ condition d'existence d'un maximum.

Avec ici $Q = 5$, on observera effectivement un pic de résonance. On en déduit la pulsation de résonance ω_r telle que :

$$u_r = \frac{\omega_r}{\omega_0} = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \implies \omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \iff f_r = f_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$$

où $f_r < f_0$. AN : $f_r \simeq 4,9 \text{ kHz}$.

Q.6 En basses fréquences : $u \ll 1$ càd $\omega \ll \omega_0$ on peut écrire :

$$X_m(u) \simeq \frac{a_m}{\omega_0^2} \implies X_m \simeq K a_m \quad \text{avec } K = \frac{1}{\omega_0^2} = C^{te}$$

En basse fréquences, le déplacement $X(t)$ est proportionnel à l'accélération a_m que l'on cherche à mesurer !

Q.7 Avec $a_c = g = C^{te}$, le second membre de l'EDL₂ devient constant et la valeur finale de X correspond à la solution particulière constante telle que :

$$\omega_0^2 X_p = -g \iff X_p = -\frac{g}{\omega_0^2} \quad \text{AN : } X_p \simeq -9,9 \text{ nm}$$

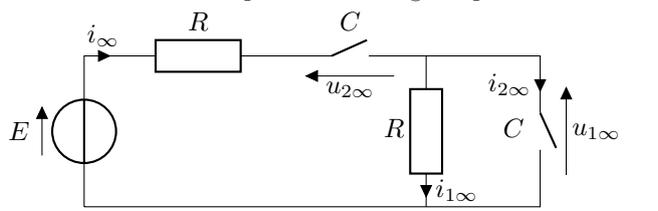
Solution de l'exercice 4 : Régime transitoire du pont de Wien

Q.1 Les conditions initiales imposent : $u_1(0) = 0$ et $u_2(0) = 0$ car les condensateurs sont déchargés.

Loi des mailles : $Ri_1(0^+) = u_1(0) \implies i_1(0^+) = 0$ et $E = Ri(0^+) + u_2(0) + u_1(0) \implies i(0^+) = \frac{E}{R}$

Loi des nœuds : $i_1(0) + i_2(0) = i(0) \implies i_2(0) = \frac{E}{R}$

Q.2 On trace le circuit équivalent en régime permanent :



Par définition : $i_{2\infty} = 0$, et $i_\infty = 0$.

Loi des nœuds : $i_\infty = i_{1\infty} + i_{2\infty} \implies i_{1\infty} = 0$

Loi des mailles : $Ri_{1\infty} = u_{1\infty} \implies u_{1\infty} = 0$

Loi des mailles : $E = Ri_\infty + u_{2\infty} + u_{1\infty} \implies u_{2\infty} = E$

Q.3 On applique la loi des mailles :

$$E = Ri + u_2 + u_1 \implies 0 = R \frac{di}{dt} + \frac{du_2}{dt} + \frac{du_1}{dt} \quad \text{or } i = C \frac{du_2}{dt}$$

$$0 = R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} + \frac{du_1}{dt} \quad \text{or } i = i_1 + i_2$$

$$0 = R \frac{di_1}{dt} + R \frac{di_2}{dt} + \frac{i_1}{C} + \frac{i_2}{C} + \frac{du_1}{dt} \quad \text{or } Ri_1(t) = u_1(t)$$

$$0 = \frac{du_1}{dt} + R \frac{di_2}{dt} + \frac{u_1}{RC} + \frac{i_2}{C} + \frac{du_1}{dt} \quad \text{or } i_2 = C \frac{du_1}{dt}$$

$$0 = 2 \frac{du_1}{dt} + RC \frac{d^2u_1}{dt^2} + \frac{u_1}{RC} + \frac{du_1}{dt}$$

$$RC \frac{d^2u_1}{dt^2} + 3 \frac{du_1}{dt} + \frac{u_1}{RC} = 0$$

$$\frac{d^2u_1}{dt^2} + \frac{3}{RC} \frac{du_1}{dt} + \frac{u_1}{(RC)^2} = 0$$

Q.4 On identifie donc : $\omega_0 = \frac{1}{RC}$ et $Q = \frac{1}{3}$.

Q.5 On les racines de l'équation caractéristique :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0 \implies \Delta = \omega_0^2 \left(\frac{1}{Q^2} - 4 \right) = 5\omega_0^2 > 0$$

on est en régime aperiodique ($Q > 1/2$) et on a : $r_1 = -\frac{\omega_0}{2Q} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$ et $r_2 = -\frac{\omega_0}{2Q} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$.

On pose $\Omega = \frac{\sqrt{\Delta}}{2} = \omega_0 \frac{\sqrt{5}}{2}$ et on a :

Méthode 1 (MPSI) :

$$u_1(t) = e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}} [A \operatorname{ch}(\Omega t) + B \operatorname{sh}(\Omega t)]$$

Or $u_1(0) = 0 \implies A = 0$ et $\frac{du_1}{dt}(0) = \frac{i_2(0)}{C} = \frac{E}{RC}$

$$\frac{du_1}{dt} = -\frac{\omega_0}{2Q} e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}} B \operatorname{sh}(\Omega t) + B \Omega e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}} \operatorname{ch}(\Omega t)$$

$$\frac{du_1}{dt}(0) = B \Omega = \frac{E}{RC} \iff B = \frac{E}{\Omega RC} = \frac{2E}{\sqrt{5}}$$

$$u_1(t) = \frac{2E}{\sqrt{5}} e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}} \operatorname{sh}(\Omega t)$$

Méthode 2 (PCSI) :

$$u_1(t) = A e^{r_1 t} + B e^{r_2 t}$$

Or $u_1(0) = 0 \implies A + B = 0 \iff A = -B$

$$\text{et } \frac{du_1}{dt}(0) = \frac{i_2(0)}{C} = \frac{E}{RC}$$

$$\frac{du_1}{dt} = A(r_1 e^{r_1 t} - r_2 e^{r_2 t}) \implies A(r_1 - r_2) = \frac{E}{RC}$$

$$A 2\Omega = \frac{E}{\Omega RC} \implies A = \frac{2E}{\sqrt{5}}$$

$$u_1(t) = \frac{2E}{\sqrt{5}} (e^{r_1 t} - e^{r_2 t})$$

Q.6 On cherche l'instant t_M telle que $\frac{du_1}{dt}(t_M) = 0$:

$$\frac{2E}{\sqrt{5}} (r_1 e^{r_1 t_M} - r_2 e^{r_2 t_M}) = 0 \iff r_1 e^{r_1 t_M} = r_2 e^{r_2 t_M} \iff \frac{r_2}{r_1} = e^{(r_1 - r_2)t_M}$$

$$\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) = (r_1 - r_2)t_M \implies \ln\left(\frac{\frac{\omega_0}{2Q} + \Omega}{\frac{\omega_0}{2Q} - \Omega}\right) = 2\Omega t_M \implies \ln\left(\frac{3 + \sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}}\right) = 2\Omega_0 \sqrt{5} t_M$$

$$t_M = \frac{RC}{2\sqrt{5}} \ln\left(\frac{3 + \sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}}\right)$$

Q.7 On applique la loi des mailles au circuit : $E = Ri + u_2 + u_1$ puis on multiplie par $i(t)$

$$Ei(t) = Ri^2 + u_2(t)i(t) + u_1(t)i(t) \iff Ei(t) = Ri^2 + u_2(t)i(t) + u_1(t)i_1(t) + u_1(t)i_2(t) \iff Ei(t) = Ri^2 + u_2(t)i(t) + R$$

$$\mathcal{P}_G = R(i^2(t) + i_1^2(t)) + \frac{d(\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2)}{dt} \iff \mathcal{P}_G = \mathcal{P}_J + \frac{d(\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2)}{dt}$$

Q.8 On intègre entre 0 et $+\infty$ le bilan de puissance précédent :

$$\mathcal{E}_G = \mathcal{E}_J + \Delta \mathcal{E}_1 + \Delta \mathcal{E}_2$$

$$\mathcal{E}_G = \int_0^{+\infty} Ei(t) dt = \int_0^{+\infty} EC \frac{du_2}{dt} dt = CE^2$$

$$\Delta \mathcal{E}_2 = \frac{1}{2} CE^2$$

$$\Delta \mathcal{E}_2 = 0$$

$$\mathcal{E}_J = \frac{1}{2} CE^2$$

... FIN ...