Exercices 18 — DL et équivalents — Corrigé

Exercice 1. — (Négligeabilité)
1/ Justifier brièvement que x^2 est négligeable devant e^x au voisinage de $+\infty$.

D'après les croissances comparées, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{\mathrm{e}^x} = 0$. D'où : $x^2 = o_{+\infty}\left(\mathrm{e}^x\right)$.

2/ Justifier brièvement que x est négligeable devant $\sqrt{x}$ au voisinage de 0.

On a $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{x}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to0^+} \sqrt{x} = 0$. D'où : $x = o_{+\infty}\left(\sqrt{x}\right)$.

3/ Comment justifier que x^2 est négligeable devant x^3, et que x^3 est négligeable devant x^2 ?

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{x^3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$. D'où : $x^2 = o_{+\infty}\left(x^3\right)$.

Par ailleurs $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to0} x = 0$. D'où : $x^3 = o_0\left(x^2\right)$.

En résumé, x^2 est négligeable devant x^3 au voisinage de $+\infty$, et x^3 est négligeable devant x^2 au voisinage de 0.

Exercice 2. — (Equivalence - Suites) Soient u et v deux suites. On dit que u est **équivalente à** v si l'on peut écrire :

$$u_n = v_n \times \varphi_n \qquad \text{avec} \quad \lim_{n\to+\infty} \varphi_n = 1$$

Dans ce cas, on note : $u_n \sim_{+\infty} v_n$.

Si v_n est non nulle à partir d'un certain rang, on a :

$$\left[u_n \sim_{+\infty} v_n\right] \Longleftrightarrow \left[\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1\right]$$

1/ Démontrer la :

Propriété fondamentale— $\left[u_n \sim_{+\infty} v_n\right] \Longrightarrow \left[\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n\right]$

Si $u_n \sim_{+\infty} v_n$, alors il existe une suite (φ_n) telle que : $u_n = v_n\varphi_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi_n = 1$.

On en déduit que si (v_n) admet une limite, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

Remarque. Comme son analogue sur les fonctions, cette propriété peut s'avérer très très très utile pour déterminer des limites de suites pathologiques. Par ailleurs, la réciproque est fausse (comme pour les fonctions) : $u_n = \sin(1/n)$ et $v_n = \arctan(1/n^2)$ tendent vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, mais ne sont pas équivalents (u_n est équivalent à $1/n$, v_n est équivalent à $1/n^2$, et $1/n^2$ est négligeable devant $1/n$).

2/ Déterminer un équivalent simple de u_n, puis en déduire la limite de u_n dans chacun des cas suivants :

a/ $u_n = (n^2 - n)\ln\left(1 + \dfrac{1}{n^3}\right)$.

D'une part : $(n^2 - n) \sim_{n\to+\infty} n^2$. D'autre part : $\ln\left(1 + \dfrac{1}{n^3}\right) \sim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^3}$.

On en déduit que : $u_n \sim_{n\to+\infty} n^2 \times \dfrac{1}{n^3}$, càd : $u_n \sim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}$.

Grâce à la propriété, on peut conclure : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$

b/ $u_n = \sqrt{n}\arctan\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

On a : $\arctan\left(\dfrac{1}{n}\right) \sim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}$.

On en déduit que : $u_n \sim_{n\to+\infty} \sqrt{n} \times \dfrac{1}{n}$, càd : $u_n \sim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

Grâce à la propriété, on peut conclure : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$

c/ $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$.

Pour tout entier $n > 0$, on a : $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n^2} = \mathrm{e}^{n^2 \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$ ($\spadesuit$).

Or : $\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) \sim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}$. Donc : $n^2 \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) \sim_{n\to+\infty} n$.

Par suite : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^2 \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = +\infty$ ($\clubsuit$)

On déduit de ($\spadesuit$) et ($\clubsuit$) que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} = +\infty$

Exercice 3. — 1/ Sans regarder votre formulaire, rappeler le DL à l'ordre 2 en 0 de la fonction cos, puis son DL à l'ordre 4 en 0.

DL à l'ordre 2 en 0 : $\cos(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$ avec $\displaystyle\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

DL à l'ordre 4 en 0 : $\cos(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + x^4\varepsilon(x)$ avec $\displaystyle\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

2/ Justifier que : $\cos(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + x^3\varepsilon(x)$ avec $\displaystyle\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

D'après la question précédente, on a :

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^4\varepsilon(x) \qquad \text{avec} \qquad \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$$

Par suite :

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + x^3\left(\frac{x}{24} + x\varepsilon(x)\right) \qquad \text{avec} \qquad \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$$

En posant : $\varepsilon_1(x) = \dfrac{x}{24} + x\varepsilon(x)$, on a :

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + x^3\varepsilon_1(x) \qquad \text{avec} \qquad \lim_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = 0$$

Remarque. Cet exemple justifie que l'on peut "gagner un degré" sur les DL des fonctions paires ou impaires. Explicitement, le DL à l'ordre 3 en zéro de la fonction sinus est :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x) \qquad \text{avec} \qquad \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$$

Comme précédemment, on peut aussi écrire :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + x^4\varepsilon(x) \qquad \text{avec} \qquad \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$$

et obtenir ainsi à peu de frais le DL à l'ordre 4 en 0 de la fonction sin.

Exercice 4. — Déterminer le développement limité à l'ordre n en a des expressions suivantes :
1/ $f(x) = x\mathrm{e}^{-x}$ (avec $a = 0$ et $n = 4$).

On commence par écrire le DL à l'ordre 4 en 0 de la fonction exponentielle (formulaire) :

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + x^4\varepsilon(x) \qquad \text{avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$$

Puis on effectue le changement de variable $X = -x$ pour obtenir * :

$$\mathrm{e}^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + x^4\varepsilon(x) \qquad \text{avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$$

Pour finir : $x\mathrm{e}^{-x} = x - x^2 + \dfrac{x^3}{2!} - \dfrac{x^4}{3!} + x^4\varepsilon(x) \qquad \text{avec } \lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$

2/ $f(x) = \mathrm{e}^{x^3}$ (avec $a = 0$ et $n = 8$).

On commence par écrire le DL à l'ordre 3 en 0 de la fonction exponentielle (formulaire) :

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + x^3\varepsilon(x) \qquad \text{avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$$

Puis on effectue le changement de variable $X = x^3$ pour obtenir † :

$$\mathrm{e}^{x^3} = 1 + x^3 + \frac{x^6}{2!} + x^8\varepsilon(x) \qquad \text{avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$$

3/ $f(x) = (1+x)^{3/2}$ (avec $a = 0$ et $n = 2$).

Il suffit d'écrire le DL à l'ordre 2 en 0 de la fonction $x \longmapsto (1+x)^\alpha$ (formulaire), avec $\alpha = 3/2$:

$$(1+x)^{3/2} = 1 + \frac{3}{2}x + \frac{\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2} - 1\right)x^2}{2} + x^2\varepsilon(x) \qquad \text{avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$$

Soit : $(1+x)^{3/2} = 1 + \dfrac{3}{2}x + \dfrac{3}{4}x^2 + x^2\varepsilon(x) \qquad \text{avec } \lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$

4/ $f(x) = \ln\left(\dfrac{1+x^2}{1+x}\right)$ (avec $a = 0$ et $n = 3$).

On a : $f(x) = \ln\left(1+x^2\right) - \ln(1+x)$.

Le DL à l'ordre 3 en 0 de $\ln(1+x)$ est donné par le formulaire :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x) \qquad \text{avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$$

Pour obtenir le DL à l'ordre 3 en 0 de $\ln(1+x^2)$, on effectue le changement de variable $X = x^2$ dans le précédent, pour obtenir ‡ :

$$\ln(1+x^2) = x^2 + x^3\varepsilon(x) \qquad \text{avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$$

On en déduit que : $\ln\left(\dfrac{1+x^2}{1+x}\right) = -x + \dfrac{3x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x) \qquad \text{avec } \lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$

5/ $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{1-x}$ (avec $a = 0$ et $n = 3$).

On écrit d'abord : $f(x) = \ln(1+x) \times \dfrac{1}{1-x}$.

D'après le formulaire, on a :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x) \qquad \text{avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$$

et

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^3\varepsilon(x) \qquad \text{avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$$

---

*. Légitimement car $\lim\limits_{x\to 0} (-x) = 0$.

†. Légitimement car $\lim\limits_{x\to 0} x^3 = 0$.

‡. Légitimement car $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$.

Puis on applique la règle permettant d'obtenir le DL d'un produit de fonctions : on effectue le produit des parties régulières, en tronquant à l'ordre 3, càd en ne tenant pas compte des puissances de x supérieures ou égales à 4, ce qui donne la ligne ci-dessous.

$$\ln(1+x) \times \frac{1}{1-x} = \left(1+x+x^2+x^3\right)\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right) + x^3\varepsilon(x) \qquad \text{avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$$

D'où :

$$\ln(1+x) \times \frac{1}{1-x} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^2 - \frac{x^3}{2} + x^3 + x^3\varepsilon(x) \qquad \text{avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$$

Soit finalement : $\ln(1+x) \times \dfrac{1}{1-x} = x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x) \qquad \text{avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$

1/ $f(x) = \mathrm{e}^{1-x^2}$ (avec $a = 0$ et $n = 6$).

Attention : on ne peut pas directement poser $X = 1 - x^2$ dans le DL de l'exponentielle, puisque $\lim_{x\to 0} 1 - x^2 \neq 0$.

Pour contourner le problème, on observe que : $\mathrm{e}^{1-x^2} = \mathrm{e} \times \mathrm{e}^{-x^2}$.

Puis on écrit le DL à l'ordre 3 en 0 de la fonction exponentielle (formulaire) :

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + x^3\varepsilon(x) \qquad \text{avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$$

On effectue ensuite le changement de variable $X = -x^2$ pour obtenir [§] :

$$\mathrm{e}^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + x^6\varepsilon(x) \qquad \text{avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$$

Finalement : $\mathrm{e}^{1-x^2} = \mathrm{e} - \mathrm{e}x^2 + \dfrac{\mathrm{e}x^4}{2!} - \dfrac{\mathrm{e}x^6}{3!} + x^6\varepsilon(x) \qquad \text{avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$

7/ $f(x) = (1-x)\,\mathrm{e}^{2x}$ (avec $a = 0$ et $n = 3$).

On écrit le DL à l'ordre 3 en 0 de la fonction exponentielle (formulaire) :

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + x^3\varepsilon(x) \qquad \text{avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$$

On effectue ensuite le changement de variable $X = 2x$ pour obtenir [¶] :

$$\mathrm{e}^{2x} = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4x^3}{3} + x^3\varepsilon(x) \qquad \text{avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$$

Puis on multiplie la partie régulière de ce DL par $(1-x)$, en ne tenant pas compte des puissances de x supérieures ou égales à 4 :

$$(1-x)\mathrm{e}^{2x} = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4x^3}{3} - x - 2x^2 - 2x^3 + x^3\varepsilon(x) \qquad \text{avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$$

Finalement : $(1-x)\mathrm{e}^{2x} = 1 + x - \dfrac{2x^3}{3} + x^3\varepsilon(x) \qquad \text{avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$

8/ $f(x) = \mathrm{e}^{\operatorname{sh} x}$ (avec $a = 0$ et $n = 4$).
D'après le formulaire :

$$\operatorname{sh}(x) = x + \frac{x^3}{6} + x^4\varepsilon(x) \qquad \text{avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$$

et

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{24} + x^4\varepsilon(x) \qquad \text{avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$$

Puis, dans le DL de e^x, on remplace tous les "x" par des "$x + \dfrac{x^3}{6}$" (partie régulière du DL de $\operatorname{sh}(x)$). Alors :

$$\mathrm{e}^{\operatorname{sh}(x)} = 1 + \left(x + \frac{x^3}{6}\right) + \frac{\left(x + \frac{x^3}{6}\right)^2}{2} + \frac{\left(x + \frac{x^3}{6}\right)^3}{6} + \frac{\left(x + \frac{x^3}{6}\right)^4}{24} + x^4\varepsilon(x) \qquad \text{avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$$

§. Légitimement cette fois-ci car $\lim_{x\to 0} -x^2 = 0$.

¶. Légitimement car $\lim_{x\to 0} 2x = 0$.

Donc :

$$e^{\text{sh}\,(x)} = 1 + x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + x^4\varepsilon(x) \qquad \text{avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$$

Finalement : $e^{\text{sh}\,(x)} = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{5x^4}{24} + x^4\varepsilon(x) \qquad \text{avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$

9/ $f(x) = e^{\sqrt{1+x}}$ (avec $a = 0$ et $n = 2$).

D'après le formulaire : $\sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} + x^2\varepsilon(x) \qquad \text{avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$

D'où : $e^{\sqrt{1+x}} = \exp\left(1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} + x^2\varepsilon(x)\right) = e \times \exp\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} + x^2\varepsilon(x)\right)$

Or :

$$\exp\left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + x^2\varepsilon(x)\right) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{\frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}}{2} + x^2\varepsilon(x)$$

D'où :

$$\exp\left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + x^2\varepsilon(x)\right) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^2}{8} + x^2\varepsilon(x)$$

Finalement : $e^{\sqrt{1+x}} = 1 + \dfrac{x}{2} + x^2\varepsilon(x) \qquad \text{avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$

10**/ $f(x) = \sqrt{1+\sqrt{1+x}}$ (avec $a = 0$ et $n = 2$).

On a (formulaire) : $\sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} + x^2\varepsilon(x) \qquad \text{avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$

Ainsi : $\sqrt{1+\sqrt{1+x}} = \sqrt{2 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} + x^2\varepsilon(x)} \qquad \text{avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$

D'où : $\sqrt{1+\sqrt{1+x}} = \sqrt{2}\sqrt{1 + \dfrac{x}{4} - \dfrac{x^2}{16} + x^2\varepsilon(x)} \qquad \text{avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$

Arrivé à cet endroit, on effectue un nouveau changement de variable, en posant $X = \dfrac{x}{4} - \dfrac{x^2}{16}$.

Puisque : $\sqrt{1+X} = 1 + \dfrac{X}{2} - \dfrac{X^2}{8} + X^2\varepsilon(X)$ et que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{4} - \dfrac{x^2}{16} = 0$, on en déduit :

$$\sqrt{1+\sqrt{1+x}} = \sqrt{2}\left(1 + \frac{\frac{x}{4} - \frac{x^2}{16}}{2} - \frac{\left(\frac{x}{4} - \frac{x^2}{16}\right)^2}{8} + x^2\varepsilon(x)\right) \qquad \text{avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$$

Donc : $\sqrt{1+\sqrt{1+x}} = \sqrt{2}\left[1 + \dfrac{x}{8} - \dfrac{x^2}{32} - \dfrac{x^2}{128}\right] + x^2\varepsilon(x) \qquad \text{avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$

Finalement : $\sqrt{1+\sqrt{1+x}} = \sqrt{2}\left[1 + \dfrac{x}{8} - \dfrac{5x^2}{128}\right] + x^2\varepsilon(x) \qquad \text{avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$

Exercice 5. — (DL, équivalents et limites). On peut lever des indéterminations en effectuant un DL en 0 à un ordre judicieusement choisi.

Exemples : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$ (DL à l'ordre 1 en 0 de sin) ; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x) - x}{x^3} = -\dfrac{1}{6}$ (DL à l'ordre 3 en 0 de sin)

1/ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arctan(x)}{3x}$

On a : $\arctan(x) \sim_0 x$. D'où : $\dfrac{\arctan(x)}{3x} \sim_0 \dfrac{1}{3}$. Par suite : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arctan(x)}{3x} = \dfrac{1}{3}$.

2/ $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\ln\left((1+x)\,(1+2x)\right)}{x}$

Pour tout réel $x > 0$, on a : $\ln\left((1+x)\,(1+2x)\right) = \ln(1+x) + \ln(1+2x)$.

D'où : $\ln\left((1+x)\,(1+2x)\right) = x + o(x) + 2x + o(x)$ soit $\ln\left((1+x)\,(1+2x)\right) = 3x + o(x)$

En particulier : $\ln\left((1+x)\,(1+2x)\right) \sim_0 3x$. D'où : $\displaystyle\frac{\ln\left((1+x)\,(1+2x)\right)}{x} \sim_0 3$.

Par suite : $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\ln\left((1+x)\,(1+2x)\right)}{x} = 3$.

3/ $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x^2+2x}$

D'une part : $\sin(x) \sim_0 x$, et d'autre part : $x^2 + 2x \sim_0 2x$. D'où : $\displaystyle\frac{\sin(x)}{x^2+2x} \sim_0 \frac{1}{2}$. Par suite : $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x^2+2x} = \frac{1}{2}$.

4/ $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\tan^2(x)}$

Ecrivons un DL à l'ordre 4 en 0 de $\tan^2(x)$.

D'après le formulaire : $\tan(x) = x + \dfrac{x^3}{3} + o(x^4)$. Par suite : $\tan^2(x) = x^2 + \dfrac{2x^4}{3} + o(x^4)$.

On en déduit que : $\displaystyle\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\tan^2(x)} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2 + \frac{2x^4}{3} + o(x^4)} = \frac{1}{x^2}\left[1 - \frac{1}{1 + \frac{2x^2}{3} + o(x^2)}\right]$ $(\spadesuit)$

Par ailleurs, d'après le formulaire encore : $\dfrac{1}{1+X} = 1 - X + o(X)$.

On en déduit que : $\displaystyle\frac{1}{1 + \frac{2x^2}{3} + o(x^2)} = 1 - \frac{2x^2}{3} + o(x^2)$. D'où : $\displaystyle 1 - \frac{1}{1 + \frac{2x^2}{3} + o(x^2)} = \frac{2x^2}{3} + o(x^2)$ $(\clubsuit)$.

D'après $(\spadesuit)$ et $(\clubsuit)$: $\displaystyle\left[\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\tan^2(x)}\right] \sim_0 \frac{1}{x^2} \times \frac{2x^2}{3}$. Donc : $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\tan^2(x)} = \frac{2}{3}$

5/ $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow +\infty} \left(2x^2 - x + 1\right)\sin\left(\frac{1}{\pi\, x^2}\right)$

D'une part, puisque $\sin(X) \sim_0 X$ et $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\pi\, x^2} = 0$, on a :

$$\sin\left(\frac{1}{\pi\, x^2}\right) \sim_{x \to +\infty} \frac{1}{\pi\, x^2}$$

D'autre part : $2x^2 - x + 1 \sim_{+\infty} 2x^2$.

On en déduit que : $\displaystyle\left(2x^2 - x + 1\right)\sin\left(\frac{1}{\pi\, x^2}\right) \sim_{+\infty} 2x^2 \times \frac{1}{\pi\, x^2}$.

D'où : $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow +\infty} \left(2x^2 - x + 1\right)\sin\left(\frac{1}{\pi\, x^2}\right) = \frac{2}{\pi}$.

6/ $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{3\sqrt{n}+\sqrt[3]{n+\sqrt{n}}}{2\sqrt{n}+\ln(n+1)+\mathrm{e}^{-n}}$

Puisque $\sqrt{n}=o_{+\infty}(n)$, on a : $\sqrt[3]{n+\sqrt{n}}\sim_{+\infty}\sqrt[3]{n}$.

Et comme : $\sqrt[3]{n}=o_{+\infty}\left(\sqrt{n}\right)$, on a : $3\sqrt{n}+\sqrt[3]{n+\sqrt{n}}\sim_{+\infty}3\sqrt{n} \qquad (\spadesuit)$.

Par ailleurs, puisque : $\ln(n+1)+\mathrm{e}^{-n}=o_{+\infty}\left(\sqrt{n}\right)$, on a : $2\sqrt{n}+\ln(n+1)+\mathrm{e}^{-n}\sim_{+\infty}2\sqrt{n} \qquad (\clubsuit)$.

D'après $(\spadesuit)$ et $(\clubsuit)$: $\dfrac{3\sqrt{n}+\sqrt[3]{n+\sqrt{n}}}{2\sqrt{n}+\ln(n+1)+\mathrm{e}^{-n}}\sim_{+\infty}\dfrac{3\sqrt{n}}{2\sqrt{n}}$.

Ainsi : $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{3\sqrt{n}+\sqrt[3]{n+\sqrt{n}}}{2\sqrt{n}+\ln(n+1)+\mathrm{e}^{-n}}=\frac{3}{2}$.

7/ $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow a}\frac{\sin(x)-\sin(a)}{\sin(x-a)}$ avec $0<a<\dfrac{\pi}{2}$.

Le premier réflexe ici est de faire un **retour à l'origine**, càd un changement de variable permettant de se ramener à un calcul de limite en 0. On pose donc :

$$X=x-a \qquad (\text{donc } x=X+a)$$

Moyennant ce changement de variable, l'énoncé de l'exo se réécrit :

$$\lim_{x\longrightarrow a}\frac{\sin(x)-\sin(a)}{\sin(x-a)}=\lim_{X\longrightarrow 0}\frac{\sin(X+a)-\sin(a)}{\sin(X)}$$

On a déjà : $\sin(X)\sim_0 X \qquad (\spadesuit)$

Par ailleurs :

$$\sin(X+a)-\sin(a)=\sin(X)\cos(a)+\sin(a)\cos(X)-\sin(a)=\sin(X)\cos(a)+\sin(a)\left(\cos(X)-1\right)$$

On en déduit que : $\sin(X+a)-\sin(a)\sim_0\sin(X)\cos(a)$.

D'où : $\sin(X+a)-\sin(a)\sim_0 X\cos(a) \qquad (\clubsuit)$

D'après $(\spadesuit)$ et $(\clubsuit)$: $\dfrac{\sin(X+a)-\sin(a)}{\sin(X)}\sim_0\cos(a)$. Par suite : $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow a}\frac{\sin(x)-\sin(a)}{\sin(x-a)}=\cos(a)$

8/ $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow a}\frac{x^a-a^x}{\sin(x-a)}$ où a est un réel >0 arbitraire

Comme dans la question précédente, on effectue un **retour à l'origine**, en posant :

$$X=x-a \qquad (\text{donc } x=X+a)$$

Moyennant ce changement de variable, l'énoncé de l'exo se réécrit :

$$\lim_{x\longrightarrow a}\frac{x^a-a^x}{\sin(x-a)}=\lim_{X\longrightarrow 0}\frac{(X+a)^a-a^{X+a}}{\sin(X)}$$

On a déjà : $\sin(X)\sim_0 X \qquad (\spadesuit)$

Par ailleurs, en prévoyant quelques aspirines pour la route :

$$\begin{aligned}
(X+a)^a-a^{X+a} &= \mathrm{e}^{a\ln(X+a)}-\mathrm{e}^{(X+a)\ln(a)}\\
&= \mathrm{e}^{a\ln\left(a\left(1+\frac{X}{a}\right)\right)}-\mathrm{e}^{X\ln(a)}\mathrm{e}^{a\ln(a)}\\
&= \mathrm{e}^{a\ln(a)+a\ln\left(1+\frac{X}{a}\right)}-\mathrm{e}^{X\ln(a)}\mathrm{e}^{a\ln(a)}\\
&= \mathrm{e}^{a\ln(a)}\mathrm{e}^{a\ln\left(1+\frac{X}{a}\right)}-\mathrm{e}^{X\ln(a)}\mathrm{e}^{a\ln(a)}\\
&= \mathrm{e}^{a\ln(a)}\left[\mathrm{e}^{a\ln\left(1+\frac{X}{a}\right)}-\mathrm{e}^{X\ln(a)}\right]\\
&= \mathrm{e}^{a\ln(a)}\left[\mathrm{e}^{a\frac{X}{a}+o_0(X)}-\mathrm{e}^{X\ln(a)}\right]\\
&= \mathrm{e}^{a\ln(a)}\left[1+X+o_0(X)-1-X\ln(a)-o_0(x)\right]\\
&= \mathrm{e}^{a\ln(a)}\left[X(1-\ln(a))+o_0(x)\right]
\end{aligned}$$

Ainsi : $(X+a)^a - a^{X+a} \sim_0 a^a X(1-\ln(a))$ $\quad(\clubsuit)$

D'après ($\spadesuit$) et ($\clubsuit$) : $\dfrac{(X+a)^a - a^{X+a}}{\sin(X)} \sim_0 a^a(1-\ln(a))$.

Par suite : $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow a} \frac{x^a - a^x}{\sin(x-a)} = a^a(1-\ln(a))$

Exercice 6. — **(Tangentes et positions relatives)** Soit f une fonction définie au voisinage de 0, ayant comme DL : $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n)$. Alors $\mathscr{C}_f$ admet une tangente T au point d'abscisse 0 d'équation $y = a_0 + a_1 x$. La position relative de $\mathscr{C}_f$ et de T est donnée **au voisinage de** 0 par le signe du premier terme non nul de degré $\geqslant 2$
A vous de jouer : dans chacun des cas suivants, déterminer l'équation de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point d'abcisse 0, et préciser la position relative de $\mathscr{C}_f$ et de T au voisinage de 0 :

1/ $f(x) = (2x+1)\mathrm{e}^x$

Soit x un réel. On a : $f(x) = (2x+1)\left(1 + x + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)\right)$.

D'où : $f(x) = 2x + 1 + 2x^2 + x + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2) = 1 + 3x + \dfrac{5x^2}{2} + o(x^2)$.

On en déduit que la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ admet une tangente au point d'abcisse 0 d'équation $y = 1 + 3x$; au voisinage de 0, $\mathscr{C}_f$ est située au-dessus de cette tangente (signe de $5x^2/2$).

2/ $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{1+x}$

Soit x un réel tel que $|x| < 1$. On a : $f(x) = \sin(x) \times \dfrac{1}{1+x}$.

Ainsi : $f(x) = \big(x + o(x^2)\big) \times \big(1 - x + x^2 + o(x^2)\big)$. Donc : $f(x) = x - x^2 + o(x^2)$.

On en déduit que la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ admet une tangente au point d'abcisse 0 d'équation $y = x$; au voisinage de 0, $\mathscr{C}_f$ est située en-dessous de cette tangente (signe de $-x^2$).

3/ $f(x) = \ln\left(1 + x + x^2\right)\sqrt{1+2x}$

Soit x un réel tel que $|x| < 1/2$.

D'une part : $\sqrt{1+2x} = (1+2x)^{1/2} = 1 + x - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$

D'autre part : $\ln\left(1 + x + x^2\right) = (x + x^2) - \dfrac{\left(x+x^2\right)^2}{2} + o(x^2) = x + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$

Donc : $f(x) = \left(1 + x - \dfrac{x^2}{2}\right)\left(x + \dfrac{x^2}{2}\right) + o(x^2) = x + \dfrac{x^2}{2} + x^2 + o(x^2)$

Soit : $f(x) = x + \dfrac{3x^2}{2} + o(x^2)$
On en déduit que la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ admet une tangente au point d'abcisse 0 d'équation $y = x$; au voisinage de 0, $\mathscr{C}_f$ est située au-dessus de cette tangente (signe de $3x^2/2$).

Exercice 7. — **(DL et asymptotes)** Par le biais du changement de variable "$X = 1/x$" dans les DL usuels, on peut obtenir des "DL en $+\infty$", appelés développements asymptotiques, permettant d'obtenir entre autres des équations d'asymptotes et des positions relatives au voisinage de $+\infty$.

Par exemple : $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ \sqrt{x^2+x+1} = x + \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{8x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)$. On en déduit que la courbe représentant $x \mapsto \sqrt{x^2+x+1}$ admet en $+\infty$ une asymptote d'équation $y = x + 1/2$, et que $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de celle-ci **au voisinage de** $+\infty$.

A vous de jouer ; dans chacun des cas suivants, déterminer l'équation de l'asymptote à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$, et préciser la position relative de $\mathscr{C}_f$ et de son asymptote :

1/ $f(x) = x^2 \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$

Soit x un réel strictement positif.

On a : $\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2x^2} + \dfrac{1}{3x^3} + o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$

D'où : $x^2 \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) = x - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3x} + o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{x}\right)$

On en déduit que la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote en $+\infty$ d'équation $y = x - \dfrac{1}{2}$; au voisinage de $+\infty$, $\mathscr{C}_f$ est située au-dessus de cette asymptote (signe de $\dfrac{1}{3x}$).

2/ $f(x) = \sqrt{x^2+2x+2}$

Soit x un réel strictement positif.

On a : $\sqrt{x^2+2x+2} = x\sqrt{1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{x^2}}$.

Or : $\sqrt{1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{x^2}} = 1 + \dfrac{\dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{x^2}}{2} - \dfrac{\left(\dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{x^2}\right)^2}{8} + o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$

$\Longrightarrow \sqrt{1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{x^2}} = 1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{2x^2} + o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$

$\Longrightarrow \sqrt{1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{x^2}} = 1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2x^2} + o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$

On en déduit que :

$$\sqrt{x^2+2x+2} = x + 1 + \frac{1}{2x} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{2x}\right)$$

Subséquemment, la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote en $+\infty$ d'équation $y = x+1$; au voisinage de $+\infty$, $\mathscr{C}_f$ est située au-dessus de cette asymptote (signe de $\dfrac{1}{2x}$).

Exercice 8. — 1/ Soit a un réel > 0. Justifier que : $a^{1/n} = 1 + \dfrac{1}{n}\ln(a) + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$

Pour tout entier naturel n non nul, on a : $a^{1/n} = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln(a)}$.

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\ln(a)$, on en déduit que : $a^{1/n} = 1 + \dfrac{1}{n}\ln(a) + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

2/ $(*)$ Etablir que : $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \left(3\sqrt[n]{2} - 2\sqrt[n]{3}\right)^n = \dfrac{8}{9}$

Soit n un entier naturel non nul.

On a : $\left(3\sqrt[n]{2} - 2\sqrt[n]{3}\right)^n = \mathrm{e}^{n\ln(u_n)}$ en ayant posé : $u_n = 3\sqrt[n]{2} - 2\sqrt[n]{3}$.

D'après la question précédente :

$$u_n = 3\left(1 + \frac{1}{n}\ln(2) + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) - 2\left(1 + \frac{1}{n}\ln(3) + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

soit : $u_n = 1 + \dfrac{1}{n}\left(3\ln(2) - 2\ln(3)\right) + o\left(\dfrac{1}{n}\right) = 1 + \dfrac{1}{n}\ln\left(\dfrac{8}{9}\right) + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$

On en déduit que : $\ln(u_n) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\ln\left(\dfrac{8}{9}\right) + o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$

Par suite : $\ln(u_n) = \dfrac{1}{n}\ln\left(\dfrac{8}{9}\right) + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Donc : $\ln(u_n) \sim_{+\infty} \dfrac{1}{n}\ln\left(\dfrac{8}{9}\right)$.

Donc : $n\ln(u_n) \sim_{+\infty} \ln\left(\dfrac{8}{9}\right)$. En particulier : $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln(u_n) = \ln\left(\dfrac{8}{9}\right)$. D'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{n\ln(u_n)} = \mathrm{e}^{\ln\left(\frac{8}{9}\right)}$

Finalement : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(3\sqrt[n]{2} - 2\sqrt[n]{3}\right)^n = \dfrac{8}{9}$

Exercice 9. — $^{(}*)$ Soit n un entier naturel quelconque, et f la fonction définie sur $]-1;1[$ par :

$$f : x \longmapsto \ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$$

Déterminer le développement limité à l'ordre $2n+2$ en 0 de f.

Soit n un entier naturel quelconque, et x un réel de $]-1;1[$.

On a : $\ln\left(\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\ln(1+x) - \ln(1-x)\right)$.

D'après le formulaire : $\ln(1+x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n+2}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k} + o\left(x^{2n+2}\right)$ et $\ln(1-x) = -\displaystyle\sum_{k=1}^{2n+2}\frac{x^k}{k} + o\left(x^{2n+2}\right)$.

On en déduit que : $\ln\left(\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{2n+2}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k} + \sum_{k=1}^{2n+2}\frac{x^k}{k}\right) + o\left(x^{2n+2}\right)$

D'où : $\ln\left(\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\right) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=1}^{2n+2}\left((-1)^{k+1}+1\right)\frac{x^k}{k} + o\left(x^{2n+2}\right)$

Donc : $\ln\left(\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\right) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o\left(x^{2n+2}\right)$

EXERCICE 10. — (Test sur les DL/équivalents)
Chacune des questions ci-dessous comporte une unique réponse correcte.

1) **Au voisinage de $+\infty$, un équivalent de $\mathrm{e}^{1/n}$ est**

- A. ☐ n
- B. ☐ $1+n$
- C. ☐ $1/n$
- D. ☑ $1+1/n$

2) **Au voisinage de 0, un équivalent de $\dfrac{\ln(1+x)}{x\sin(x)}$ est**

- A. ☐ 0
- B. ☐ 1
- C. ☐ x
- D. ☑ $1/x$

3) $\displaystyle \lim_{x\longrightarrow 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = \dots$

- A. ☑ 0
- B. ☐ 1
- C. ☐ $+\infty$
- D. ☐ n'existe pas.

4) $\displaystyle \lim_{x\longrightarrow +\infty} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = \dots$

- A. ☐ 0
- B. ☑ 1
- C. ☐ $+\infty$
- D. ☐ n'existe pas.

5) **Au voisinage de 0, un équivalent de $\left(x^3+x^2\right)\tan(x)$ est**

- A. ☐ 0
- B. ☐ x^2
- C. ☑ x^3
- D. ☐ x^4

6) **Au voisinage de $+\infty$, un équivalent de $\left(x^3+x^2\right)\arctan(x)$ est**

- A. ☐ 0
- B. ☐ x^2
- C. ☑ $\dfrac{\pi}{2}x^3\dots$
- D. ☐ x^4

7) **Pour se reposer un peu :** $\displaystyle \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\arctan(x)}{x} = \dots$

- A. ☐ 0
- B. ☑ 1
- C. ☐ $\pi/2$
- D. ☐ $+\infty$ ou $-\infty$

8) **Au voisinage de $+\infty$, un équivalent de $\dfrac{x+\sqrt{x}}{x^2+\ln(x)}$ est**

- A. ☑ $1/x$
- B. ☐ $x/\ln(x)$
- C. ☐ $\sqrt{x}/\ln(x)$
- D. ☐ $x^{-3/2}$

9) $\displaystyle \lim_{n\longrightarrow +\infty} \left(1-\frac{2}{n}\right)^n = \dots$

- A. ☐ 0
- B. ☐ 1
- C. ☑ e^{-2}
- D. ☐ Aucune des réponses précédentes n'est exacte.

10) **Vous avez répondu de manière aléatoire et indépendante aux 9 questions précédentes. La probabilité que vous ayez exactement 7 bonnes réponses est**

- A. ☐ $\left(\dfrac{1}{4}\right)^7 \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^2$
- B. ☑ $\dfrac{36\times 9}{4^9}$
- C. ☐ $\dbinom{7}{9} \times \left(\dfrac{1}{4}\right)^2 \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^7$
- D. ☐ Aucune des réponses précédentes n'est exacte.

Exercice 11. —

1) $f(x) = x - x^2 + \dfrac{x^3}{2} - \dfrac{x^4}{6} + o\left(x^4\right)$

2) $f(x) = 4x - \dfrac{32}{3}\, x^3 + o\left(x^4\right)$

3) $f(x) = x - \dfrac{2}{3}\, x^3 + o\left(x^3\right)$

4) $f(x) = 3x - 9x^3 + o\left(x^4\right)$

5) $f(x) = x^2 + \dfrac{x^3}{2} - \dfrac{x^4}{8} + o\left(x^4\right)$

6) $f(x) = 1 + x^3 + \dfrac{x^6}{2} + o\left(x^8\right)$

7) $f(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{9}\, x - \dfrac{\sqrt{3}}{18}\, x^2 + o\left(x^2\right)$

8) $f(x) = 1 + \dfrac{3}{2}\, x + \dfrac{3}{8}\, x^2 + o\left(x^2\right)$

9) $f(x) = x + \dfrac{1}{3}\, x^3 + \dfrac{2}{15}\, x^5 + \dfrac{17}{315}\, x^7 + o\left(x^7\right)$

10) $f(x) = 2 + \dfrac{1}{12}\, x - \dfrac{1}{288}\, x^2 + o\left(x^2\right)$

11) $f(x) = -x + \dfrac{3}{2}\, x^2 - \dfrac{1}{3}\, x^3 + o\left(x^3\right)$

12) $f(x) = x + \dfrac{1}{2}\, x^2 + \dfrac{5}{6}\, x^3 + o\left(x^3\right)$

13) $f(x) = \mathrm{e} - \mathrm{e}\, x^2 + \dfrac{\mathrm{e}}{2}\, x^4 - \dfrac{\mathrm{e}}{6}\, x^6 + o\left(x^6\right)$

14) $f(x) = 1 + x - \dfrac{2}{3}\, x^3 + o\left(x^3\right)$

15) $f(x) = \mathrm{e}^2 + \mathrm{e}^2 x - \dfrac{\mathrm{e}^2}{3}\, x^3 - \dfrac{\mathrm{e}^2}{6}\, x^4 + o\left(x^4\right)$

16) $f(x) = 1 + x + \dfrac{1}{2}\, x^2 + \dfrac{1}{3}\, x^3 + \dfrac{5}{24}\, x^4 + o\left(x^4\right)$

17) $f(x) = \mathrm{e} + \dfrac{\mathrm{e}}{2}\, x + o\left(x^2\right)$

18) $f(x) = \ln 2 + \dfrac{\alpha+\beta}{2}\, x + \dfrac{(\alpha-\beta)^2}{8}\, x^2 + o\left(x^2\right)$

19) $f(x) = \sqrt{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{8}\, x - \dfrac{5\sqrt{2}}{128}\, x^2 + o\left(x^2\right)$

20) $f(x) = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{36}\, x^2 + o\left(x^2\right)$

21) $f(x) = -2x^2 - 7x^3 + o\left(x^3\right)$

22) $f(x) = x - \dfrac{1}{2}\, x^2 + \dfrac{1}{6}\, x^3 + o\left(x^3\right)$

23) $f(x) = -\dfrac{1}{2}\, x + \dfrac{5}{24}\, x^2 + o\left(x^3\right)$

24) $f(x) = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{15}\, x^2 + o\left(x^3\right)$

25) $f(x) = -\dfrac{1}{6}\, x^2 + o\left(x^3\right)$

26) $f(x) = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{2}\, x + \dfrac{1}{4}\, x^2 + \dfrac{1}{12}\, x^3 + o\left(x^3\right)$

27) $f(x) = 2x + \dfrac{2}{3}\, x^3 + o\left(x^4\right)$

28) $f(x) = \ln 2 + \dfrac{1}{2}\, x + \dfrac{1}{8}\, x^2 + o\left(x^3\right)$

29) $f(x) = -\dfrac{1}{2}\, x - \dfrac{1}{12}\, x^3 + o\left(x^4\right)$

30) $f(x) = x + \dfrac{1}{2}\, x^2 + \dfrac{1}{3}\, x^3 + o\left(x^4\right)$

31) $f(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{x}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{4}\, x^2 - \dfrac{1}{12}\, x^3 + o\left(x^3\right)$

32) $f(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(1 + x - \dfrac{1}{2}\, x^2 - \dfrac{1}{6}\, x^3 + \dfrac{1}{24}\, x^4\right) + o\left(x^4\right)$

33) $f(x) = 1 + \dfrac{1}{2}\, x^4 + o\left(x^7\right)$

34) $f(x) = 1 - \dfrac{1}{2}\, x^2 + \dfrac{5}{24}\, x^4 + o\left(x^5\right)$

35) $f(x) = 1 + \dfrac{4}{3}\, x + \dfrac{11}{9}\, x^2 + \dfrac{104}{81}\, x^3 + o\left(x^3\right)$

36) $f(x) = 1 + \dfrac{1}{6}\, x^2 + \dfrac{7}{360}\, x^4 + o\left(x^5\right)$

37) $f(x) = 1 + x^2 + x^3 + x^4 + 2x^5 + 2x^6 + 3x^7 + o\left(x^7\right)$

38) $f(x) = \sqrt{\mathrm{e}}\left(1 - \dfrac{1}{12}\, x^2\right) + o\left(x^3\right)$

39) $f(x) = 1 - \dfrac{3}{2}\, x^2 + \dfrac{7}{8}\, x^4 - \dfrac{61}{240}\, x^6 + o\left(x^7\right)$

40) $f(x) = x^2 - \dfrac{5}{6}\, x^4 + \dfrac{32}{45}\, x^6 - \dfrac{173}{252}\, x^8 + o\left(x^9\right)$

41) $f(x) = 1 + \dfrac{1}{8}\, x^4 + o\left(x^5\right)$

42) $f(x) = \mathrm{e}\left(1 - \dfrac{1}{2}\, x + \dfrac{11}{24}\, x^2\right) + o\left(x^2\right)$

43) $f(x) = \mathrm{e}\left(1 + (x-1) + \dfrac{1}{2}\,(x-1)^2\right) + o\left((x-1)^2\right)$

44) $f(x) = (x-1) - \dfrac{1}{2}\,(x-1)^2 + \dfrac{1}{3}\,(x-1)^3 + o\left((x-1)^3\right)$

45) $f(x) = 1 + \dfrac{1}{2}\,(x-1) - \dfrac{1}{8}\,(x-1)^2 + o\left((x-1)^2\right)$

46) $f(x) = 2 + \dfrac{1}{4}\,(x-4) - \dfrac{1}{64}\,(x-4)^2 + o\left((x-4)^2\right)$

47) $f(x) = -(x-\pi) + \dfrac{1}{6}\,(x-\pi)^3 + o\left((x-\pi)^4\right)$

48) $f(x) = 1 - \dfrac{1}{2}\,(x-\pi/2)^2 + o\left((x-\pi/2)^3\right)$

49) $f(x) = -(x-\pi/2) - \dfrac{1}{6}\,(x-\pi/2)^3 + o\left((x-\pi/2)^4\right)$

50) $f(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,(x-\pi/3) - \dfrac{1}{4}\,(x-\pi/3)^2 + o\left((x-\pi/3)^2\right)$

51) $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{6}\dfrac{1}{x^3} + \dfrac{1}{120}\dfrac{1}{x^5} + o\left(\dfrac{1}{x^6}\right)$

52) $f(x) = \dfrac{1}{3}\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{7}{90}\dfrac{1}{x^4} + o\left(\dfrac{1}{x^5}\right)$

53) $f(x) = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{1}{4}\,(x-\pi/3) - \dfrac{3\sqrt{3}}{16}\,(x-\pi/3)^2 + \dfrac{3}{16}\,(x-\pi/3)^3 + o\left((x-\pi/3)^3\right)$

54) $f(x) = 1 + 2\,(x-\pi/4) + 2\,(x-\pi/4)^2 + \dfrac{8}{3}\,(x-\pi/4)^3 + o\left((x-\pi/4)^3\right)$

55) $f(x) = 1 + (x-\pi/4) + \dfrac{1}{2}\,(x-\pi/4)^2 + o\left((x-\pi/4)^2\right)$

56) $f(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4}\,(x-2) + \dfrac{1}{8}\,(x-2)^2 - \dfrac{1}{16}\,(x-2)^3 + \dfrac{1}{32}\,(x-2)^4 + o\left((x-2)^4\right)$

57) $f(x) = x - x^3 + x^5 + o\left(x^6\right)$