Exercices 18 — DL et équivalents

Exercice 1. — **(Négligeabilité)** 1/ Justifier brièvement que x^2 est négligeable devant e^x au voisinage de $+\infty$.

2/ Justifier brièvement que x est négligeable devant $\sqrt{x}$ au voisinage de 0.

3/ Peut-on affirmer que x^2 est négligeable devant x^3, et que x^3 est négligeable devant x^2 ?

Exercice 2. — **(Equivalence - Suites)** Soient u et v deux suites. On dit que u est **équivalente à** v si l'on peut écrire :

$$u_n = v_n \times \varphi_n \qquad \text{avec} \quad \lim_{n\to+\infty} \varphi_n = 1$$

Dans ce cas, on note : $u_n \sim_{+\infty} v_n$.

Si v_n est non nulle à partir d'un certain rang, on a :

$$[u_n \sim_{+\infty} v_n] \Longleftrightarrow \left[\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1\right]$$

1/ Démontrer la :

Propriété fondamentale— $[u_n \sim_{+\infty} v_n] \Longrightarrow \left[\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n\right]$

2/ Déterminer un équivalent simple de u_n, puis en déduire la limite de u_n dans chacun des cas suivants :

a/ $u_n = (n^2 - n)\ln\left(1 + \dfrac{1}{n^3}\right)$ b/ $u_n = \sqrt{n}\arctan\left(\dfrac{1}{n}\right)$ c/ $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$

3/ Calculer les limites suivantes :

a/ $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\sin\left(\frac{1}{n}\right)$ b/ $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^2\sin\left(\frac{1}{n}\right)$ c/ $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left[n\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right]^{n^2}$

Exercice 3. — 1/ Sans regarder votre formulaire, rappeler le DL à l'ordre 2 en 0 de la fonction cos, puis son DL à l'ordre 4 en 0.

2/ Justifier que : $\cos(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + x^3\varepsilon(x)$ avec $\displaystyle\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$.

Exercice 4. — Déterminer le développement limité à l'ordre n en a des expressions suivantes :

1/ $f(x) = x\mathrm{e}^{-x}$ (avec $a = 0$ et $n = 4$)

2/ $f(x) = \mathrm{e}^{x^3}$ (avec $a = 0$ et $n = 8$)

3/ $f(x) = (1+x)^{3/2}$ (avec $a = 0$ et $n = 2$)

4/ $f(x) = \ln\left(\dfrac{1+x^2}{1+x}\right)$ (avec $a = 0$ et $n = 3$)

5/ $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{1-x}$ (avec $a = 0$ et $n = 3$)

6/ $f(x) = \mathrm{e}^{1-x^2}$ (avec $a = 0$ et $n = 6$)

7/ $f(x) = (1-x)\,\mathrm{e}^{2x}$ (avec $a = 0$ et $n = 3$)

8/ $f(x) = \mathrm{e}^{\operatorname{sh} x}$ (avec $a = 0$ et $n = 4$)

9/ $f(x) = \mathrm{e}^{\sqrt{1+x}}$ (avec $a = 0$ et $n = 2$)

10/ $f(x) = \sqrt{1+\sqrt{1+x}}$ (avec $a = 0$ et $n = 2$)

Exercice 5. — **(DL, équivalents et limites)**. On peut lever des indéterminations en effectuant un DL en 0 à un ordre judicieusement choisi.

Exemples : $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1$ (DL à l'ordre 1 en 0 de sin) ; $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x) - x}{x^3} = -\frac{1}{6}$ (DL à l'ordre 3 en 0 de sin)

A vous de jouer :

1/ $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\arctan(x)}{3x}$

2/ $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln((1+x)(1+2x))}{x}$

3/ $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x^2+2x}$

4/ $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\tan^2(x)}$

5/ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(2x^2 - x + 1)\sin\left(\frac{1}{\pi\, x^2}\right)$

6/ $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{3\sqrt{n} + \sqrt[3]{n+\sqrt{n}}}{2\sqrt{n} + \ln(n+1) + \mathrm{e}^{-n}}$

7/ $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{\sin(x) - \sin(a)}{\sin(x-a)}$ avec $0 < a < \dfrac{\pi}{2}$

8/ $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{x^a - a^x}{\sin(x-a)}$ où a est un réel > 0 arbitraire

Exercice 6. — **(Tangentes et positions relatives)** Soit f une fonction définie au voisinage de 0, ayant comme DL : $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n)$. Alors $\mathscr{C}_f$ admet une tangente T au point d'abscisse 0 d'équation $y = a_0 + a_1 x$. La position relative de $\mathscr{C}_f$ et de T est donnée **au voisinage de** 0 par le signe du premier terme non nul de degré $\geqslant 2$

Exemples : la courbe représentative C_1 de la fonction exponentielle admet une tangente au point d'abcisse 0 d'équation $y = 1 + x$; au voisinage de 0, C_1 est située au-dessus de cette tangente (signe de $x^2/2!$).

La courbe représentative C_2 de la fonction sinus admet une tangente au point d'abcisse 0 d'équation $y = x$; au voisinage de 0, C_2 est située au-dessus à gauche de 0, et en dessous à droite de 0 (signe de $-x^3/3!$).

A vous de jouer : dans chacun des cas suivants, déterminer l'équation de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point d'abcisse 0, et préciser la position relative de $\mathscr{C}_f$ et de T au voisinage de 0 :

1/ $f(x) = (2x+1)\mathrm{e}^x$

2/ $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{1+x}$

3/ $f(x) = \ln\left(1 + x + x^2\right)\sqrt{1+2x}$

Exercice 7. — **(DL et asymptotes)** Par le biais du changement de variable "$X = 1/x$" dans les DL usuels, on peut obtenir des "DL en $+\infty$", appelés développements asymptotiques, permettant d'obtenir entre autres des équations d'asymptotes et des positions relatives au voisinage de $+\infty$.

Par exemple : $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ \sqrt{x^2+x+1} = x + \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{8x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)$. On en déduit que la courbe représentant $x \mapsto \sqrt{x^2+x+1}$ admet en $+\infty$ une asymptote d'équation $y = x + 1/2$, et que $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de celle-ci **au voisinage de** $+\infty$.

A vous de jouer ; dans chacun des cas suivants, déterminer l'équation de l'asymptote à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$, et préciser la position relative de $\mathscr{C}_f$ et de son asymptote :

1/ $f(x) = x^2 \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$

2/ $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 2}$

Exercice 8. — 1/ Soit a un réel > 0. Justifier que : $a^{1/n} = 1 + \dfrac{1}{n}\ln(a) + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$

2/ $^{(}*)$ Etablir que : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(3\sqrt[n]{2} - 2\sqrt[n]{3}\right)^n = \frac{8}{9}$

Exercice 9. — $^{(}*)$ Soit n un entier naturel quelconque, et f la fonction définie sur $]-1;1[$ par :

$$f : x \longmapsto \ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$$

Déterminer le développement limité à l'ordre $2n+2$ en 0 de f.

Exercice 10. — (Test sur les DL/équivalents)
Chacune des questions ci-dessous comporte une unique réponse correcte.

1) **Au voisinage de $+\infty$, un équivalent de $\mathrm{e}^{1/n}$ est**

A. ☐ n
B. ☐ $1+n$
C. ☐ $1/n$
D. ☐ $1+1/n$

2) **Au voisinage de 0, un équivalent de $\dfrac{\ln(1+x)}{x\sin(x)}$ est**

A. ☐ 0
B. ☐ 1
C. ☐ x
D. ☐ $1/x$

3) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = \dots$

A. ☐ 0
B. ☐ 1
C. ☐ $+\infty$
D. ☐ n'existe pas.

4) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = \dots$

A. ☐ 0
B. ☐ 1
C. ☐ $+\infty$
D. ☐ n'existe pas.

5) **Au voisinage de 0, un équivalent de $\left(x^3+x^2\right)\tan(x)$ est**

A. ☐ 0
B. ☐ x^2
C. ☐ x^3
D. ☐ x^4

6) **Au voisinage de $+\infty$, un équivalent de $\left(x^3+x^2\right)\arctan(x)$ est**

A. ☐ 0
B. ☐ x^2
C. ☐ x^3
D. ☐ x^4

7) **Pour se reposer un peu :** $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\arctan(x)}{x} = \dots$

A. ☐ 0
B. ☐ 1
C. ☐ $\pi/2$
D. ☐ $+\infty$ ou $-\infty$

8) **Au voisinage de $+\infty$, un équivalent de $\dfrac{x+\sqrt{x}}{x^2+\ln(x)}$ est**

A. ☐ $1/x$
B. ☐ $x/\ln(x)$
C. ☐ $\sqrt{x}/\ln(x)$
D. ☐ $x^{-3/2}$

9) $\displaystyle\lim_{n\to +\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right)^n = \dots$

A. ☐ 0
B. ☐ 1
C. ☐ e^{-2}
D. ☐ Aucune des réponses précédentes n'est exacte.

10) **Vous avez répondu de manière aléatoire et indépendante aux 9 questions précédentes. La probabilité que vous ayez exactement 7 bonnes réponses est**

A. ☐ $\left(\dfrac{1}{4}\right)^7\times\left(\dfrac{3}{4}\right)^2$
B. ☐ $\dfrac{36\times 9}{4^9}$
C. ☐ $\dbinom{7}{9}\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^2\times\left(\dfrac{3}{4}\right)^7$
D. ☐ Aucune des réponses précédentes n'est exacte.

Exercice 11. — Déterminer le développement limité à l'ordre n en a des expressions suivantes :

1) $f(x) = x\mathrm{e}^{-x}$ (avec $a = 0$ et $n = 4$)
2) $f(x) = \sin(4x)$ (avec $a = 0$ et $n = 4$)
3) $f(x) = \sin x \cos x$ (avec $a = 0$ et $n = 3$)
4) $f(x) = \arctan(3x)$ (avec $a = 0$ et $n = 4$)
5) $f(x) = x^2\sqrt{1+x}$ (avec $a = 0$ et $n = 4$)
6) $f(x) = \mathrm{e}^{x^3}$ (avec $a = 0$ et $n = 8$)
7) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x+3}}$ (avec $a = 0$ et $n = 2$)
8) $f(x) = (1+x)^{3/2}$ (avec $a = 0$ et $n = 2$)
9) $f(x) = \tan x$ (avec $a = 0$ et $n = 7$)
10) $f(x) = \sqrt[3]{8+x}$ (avec $a = 0$ et $n = 2$)
11) $f(x) = \ln\left(\dfrac{1+x^2}{1+x}\right)$ (avec $a = 0$ et $n = 3$)
12) $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{1-x}$ (avec $a = 0$ et $n = 3$)
13) $f(x) = \mathrm{e}^{1-x^2}$ (avec $a = 0$ et $n = 6$)
14) $f(x) = (1-x)\,\mathrm{e}^{2x}$ (avec $a = 0$ et $n = 3$)
15) $f(x) = \mathrm{e}^{2+x}\cos x$ (avec $a = 0$ et $n = 4$)
16) $f(x) = \mathrm{e}^{\operatorname{sh} x}$ (avec $a = 0$ et $n = 4$)
17) $f(x) = \mathrm{e}^{\sqrt{1+x}}$ (avec $a = 0$ et $n = 2$)
18) $f(x) = \ln\left(\mathrm{e}^{\alpha x} + \mathrm{e}^{\beta x}\right)$ (avec $a = 0$ et $n = 2$, α et β réels non-nuls)
19) $f(x) = \sqrt{1+\sqrt{1+x}}$ (avec $a = 0$ et $n = 2$)
20) $f(x) = \dfrac{1}{1+\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$ (avec $a = 0$ et $n = 3$)
21) $f(x) = \sin\left(2x-4x^2\right) - 2\sin\left(x-x^2\right)$ (avec $a = 0$ et $n = 3$)
22) $f(x) = \ln(1+\sin x)$ (avec $a = 0$ et $n = 3$)
23) $f(x) = \ln\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)$ (avec $a = 0$ et $n = 2$)
24) $f(x) = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\arcsin^2 x}$ (avec $a = 0$ et $n = 3$)
25) $f(x) = \ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$ (avec $a = 0$ et $n = 3$)
26) $f(x) = \arctan\left(\dfrac{1}{1-x}\right)$ (avec $a = 0$ et $n = 3$)
27) $f(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ (avec $a = 0$ et $n = 4$)
28) $f(x) = \ln(1+\mathrm{e}^x)$ (avec $a = 0$ et $n = 3$)
29) $f(x) = \dfrac{\ln(\cos x)}{x}$ (avec $a = 0$ et $n = 4$)
30) $f(x) = \mathrm{e}^x \sin x$ (avec $a = 0$ et $n = 4$)
31) $f(x) = \sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ (avec $a = 0$ et $n = 3$)
32) $f(x) = \cos\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)$ (avec $a = 0$ et $n = 4$)
33) $f(x) = \operatorname{ch}\left(x^2\right)$ (avec $a = 0$ et $n = 6$)
34) $f(x) = \dfrac{\arctan x}{\arcsin x}$ (avec $a = 0$ et $n = 4$)
35) $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{1+x}}{1-x}$ (avec $a = 0$ et $n = 3$)
36) $f(x) = \dfrac{x}{\sin x}$ (avec $a = 0$ et $n = 4$)
37) $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2-x^3}$ (avec $a = 0$ et $n = 7$)
38) $f(x) = (\operatorname{ch} x)^{1/x^2}$ (avec $a = 0$ et $n = 2$)
39) $f(x) = \cos^3 x$ (avec $a = 0$ et $n = 7$)
40) $f(x) = \ln\left(1+\sin^2 x\right)$ (avec $a = 0$ et $n = 8$)
41) $f(x) = \operatorname{ch}(1-\cos x)$ (avec $a = 0$ et $n = 5$)
42) $f(x) = (1+x)^{1/x}$ (avec $a = 0$ et $n = 2$)
43) $f(x) = \mathrm{e}^x$ (avec $a = 1$ et $n = 2$)
44) $f(x) = \ln x$ (avec $a = 1$ et $n = 3$)
45) $f(x) = \sqrt{x}$ (avec $a = 1$ et $n = 2$)
46) $f(x) = \sqrt{x}$ (avec $a = 4$ et $n = 2$)
47) $f(x) = \sin x$ (avec $a = \pi$ et $n = 3$)
48) $f(x) = \sin x$ (avec $a = \dfrac{\pi}{2}$ et $n = 3$)
49) $f(x) = \cos x$ (avec $a = \dfrac{\pi}{2}$ et $n = 4$)
50) $f(x) = \cos x$ (avec $a = \dfrac{\pi}{3}$ et $n = 2$)
51) $f(x) = \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ (avec $a = +\infty$ et $n = 5$)
52) $f(x) = \ln\left(x\tan\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)$ (avec $a = +\infty$ et $n = 4$)
53) $f(x) = \arctan(2\sin x)$ (avec $a = \dfrac{\pi}{3}$ et $n = 3$)
54) $f(x) = \tan x$ (avec $a = \dfrac{\pi}{4}$ et $n = 3$)
55) $f(x) = \sqrt{\tan x}$ (avec $a = \dfrac{\pi}{4}$ et $n = 3$)
56) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ (avec $a = 2$ et $n = 4$)
57) $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1-t^2}{\left(1+t^2\right)^2}\mathrm{d}t$ (avec $a = 0$ et $n = 5$)