

## COLLE 19 – QUESTIONS DE COURS

**QUESTION DE COURS 1** —  $f = o_a(g) \iff \lim_a \frac{f}{g} = 0$

**PREUVE.**  $f = o_a(g) \iff f = g\varepsilon$  avec  $\lim_a \varepsilon = 0 \iff \frac{f}{g} = \varepsilon$  avec  $\lim_a \varepsilon = 0 \iff \lim_a \frac{f}{g} = 0$

**Conclusion.**  $f = o_a(g) \iff \lim_a \frac{f}{g} = 0$

*Remarque.* Il n'est pas indispensable d'inclure dans cette démo (ni dans les deux suivantes) des "x", des quantificateurs, et des hypothèses... du moment que l'on sait de quoi il est question!

Explicitement, on suppose ici que :

- $a$  est un nombre réel;
- $f$  et  $g$  sont 2 fonctions définies sur un même voisinage  $V$  de  $a$ , et sont à valeurs dans  $\mathbb{K}$  (avec  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ );
- $g$  ne s'annule pas sur  $V$ , pour que le quotient  $\frac{f(x)}{g(x)}$  soit défini lorsque  $x \in V$ ;
- $\varepsilon$  est une fonction définie sur  $V$ , à valeurs dans  $\mathbb{K}$ , et vérifie :  $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$  (avec  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ )

**QUESTION DE COURS 2** —  $f \sim_a g \iff \lim_a \frac{f}{g} = 1$

**PREUVE.**  $f \sim_a g \iff f = g\varphi$  avec  $\lim_a \varphi = 1 \iff \lim_a \frac{f}{g} = \varphi$  avec  $\lim_a \varphi = 1 \iff \lim_a \frac{f}{g} = 1$

**Conclusion.**  $f \sim_a g \iff \lim_a \frac{f}{g} = 1$

**QUESTION DE COURS 3** —  $f \sim_a g \iff f = g + o_a(g)$

**PREUVE.**  $f \sim_a g \iff f = g\varphi$  avec  $\lim_a \varphi = 1 \iff f = g(1 + \varphi - 1)$  avec  $\lim_a \varphi = 1$   
 $\iff f = g + (\varphi - 1)g$  avec  $\lim_a \varphi = 1 \iff f = g + \varepsilon g$  avec  $\lim_a \varepsilon = 0 \iff f = g + o_a(g)$

**Conclusion.**  $f \sim_a g \iff f = g + o_a(g)$

**QUESTION DE COURS 4** — **Application de la formule de Taylor 1.** DL en 0 à l'ordre  $2n$  de cos.

Soit  $n$  un entier naturel quelconque. La fonction cos étant de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ , elle admet en particulier un DL à l'ordre  $2n$  en 0, qui est donné par la formule de Taylor :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(x) = \sum_{k=0}^{2n} \frac{\cos^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^{2n})$$

En séparant dans la partie régulière les termes de rangs pairs et ceux de rangs impairs, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\cos^{(2k)}(0)}{(2k)!} x^{2k} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\cos^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!} x^{2k+1} + o(x^{2n})$$

Or la fonction cos étant paire, toutes ses dérivées d'ordre impair sont impaires.

Il s'ensuit que :  $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ ,  $\cos^{(2k+1)}(0) = 0$ . D'où :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\cos^{(2k)}(0)}{(2k)!} x^{2k} + o(x^{2n})$$

En outre, pour tout  $(x, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$ , on a :  $\cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$ . Il s'ensuit que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \cos^{(2k)}(0) = \cos(k\pi) = (-1)^k$$

$$\text{Finalement : } \forall (x, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}, \quad \cos(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n}) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$

**QUESTION DE COURS 5 — Application de la formule de Taylor 2.** DL en 0 à un ordre  $n$  arbitraire de  $f : x \mapsto 1/(1-x)$ . En déduire le DL en 0 à tout ordre de la fonction arctangente.

**PREUVE.** Notons  $I = ]-1, 1[$ . La fonction  $f : x \mapsto 1/(1-x)$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $I$  d'après les théorèmes généraux. Le but est de prouver que  $f$  admet une dérivée à tout ordre, et que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, \quad f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$$

On note  $P(n)$  la propriété : “ $\forall x \in I, f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$ ”.

L'initialisation est immédiate. Supposons donc  $P(n)$  établie à un certain rang  $n \in \mathbb{N}$ . Alors  $f^{(n)}$  est dérivable sur  $I$  (“HR+TG”) et :

$$\forall x \in I, \quad f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x) = \frac{d}{dx} \left( \frac{n!}{(1-x)^{n+1}} \right) = \frac{n! \times (n+1)}{(1-x)^{n+2}} = \frac{(n+1)!}{(1-x)^{n+2}}$$

Ce qui établit l'hérédité et achève cette récurrence. On en déduit en particulier que :  $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(0) = n!$ .

En conjuguant ce résultat avec la formule de Taylor, on en déduit que  $f$  admet en 0 un DL à tout ordre, et explicitement :

$$\forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{1-x} = \left[ \sum_{k=0}^n x^k \right] + o(x^n) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$$

$$\text{Par changement de variable } x \mapsto (-x^2) : \forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{1+x^2} = \left[ \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k} \right] + o(x^{2n})$$

Par intégration (et en notant que  $\arctan(0) = 0$ ) :

$$\forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N}, \quad \arctan(x) = \left[ \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} \right] + o(x^{2n+1}) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$$

**QUESTION DE COURS 6 — Théorème (FORMULE DE TAYLOR-YOUNG) :** si  $f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$  et  $a \in I$ , alors  $f$  admet un DL à l'ordre  $n$  en  $a$ , explicitement :

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \left[ \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right] + o((x-a)^n)$$

**PREUVE.** Posons tout  $n \in \mathbb{N}$ , notons  $\mathcal{P}(n)$  : “Si  $f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ , alors  $\forall x \in I, f(x) = \left[ \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right] + o((x-a)^n)$ ”

► Initialisation (pour  $n = 0$ ) : supposons que  $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ , c'est-à-dire que  $f$  est continue sur  $I$ . Pour tout réel  $a$  de  $I$ , on peut judicieusement écrire :

$$\forall x \in I, \quad f(x) = f(a) + \underbrace{(f(x) - f(a))}_{\varepsilon(x)}$$

On pose :  $\varepsilon(x) = (f(x) - f(a))$ . Comme  $f$  est continue en  $a$  par hypothèse, on a :  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ . D'où :  $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$ . On a donc obtenu, sous l'hypothèse que  $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$  :

$$\forall x \in I, \quad f(x) = f(a) + \varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0, \text{ c\`ad : } \forall x \in I, \quad f(x) = f(a) + o_a(1)$$

D'où  $\mathcal{P}(0)$  est vraie.

► Hérédité : supposons la propriété  $\mathcal{P}(n)$  vraie pour un certain  $n \in \mathbb{N}$ .

Soit que  $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$ . On observe que sous cette hypothèse on a :  $f' \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ . On peut alors légitimement appliquer l'hypothèse de récurrence à la fonction  $f'$  pour affirmer que pour tout réel  $a \in I$  on a :

$$\forall t \in I, f'(t) = \left[ \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right] + o_a((t-a)^n)$$

Puis, pour un  $x$  fixé dans  $I$ , on intègre cette relation entre  $a$  et  $x$  pour obtenir (par linéarité de l'intégrale) :

$$\forall x \in I, \int_a^x f'(t) dt = \left[ \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k+1)}(a)}{k!} \int_a^x (t-a)^k dt \right] + \int_a^x o_a((t-a)^n) dt$$

Soit :

$$\forall x \in I, f(x) - f(a) = \left[ \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k+1)}(a)}{k!} \frac{(x-a)^{k+1}}{k+1} \right] + \int_a^x o_a((t-a)^n) dt$$

$$\text{D'où : } \forall x \in I, f(x) = f(a) + \left[ \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!} (x-a)^{k+1} \right] + \int_a^x o_a((t-a)^n) dt$$

Et finalement :

$$\forall x \in I, f(x) = \left[ \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right] + \underbrace{\int_a^x o_a((t-a)^n) dt}_{=o_a((x-a)^{n+1})}$$

Récurrence établie.

— FIN DE LA QUESTION DE COURS \* —

**Pour information, preuve de la partie admise.** Pour achever la preuve, il "suffit" donc de montrer que le terme  $\int_a^x o_a((t-a)^n) dt$  est négligeable devant  $(x-a)^{n+1}$  au voisinage de  $a$ , c'est-à-dire qu'on peut l'écrire comme  $(x-a)^{n+1} \varphi(x)$  avec  $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 0$ .

On commence par noter que :  $o_a((t-a)^n) = (t-a)^n \varepsilon(t)$  avec  $\lim_{t \rightarrow a} \varepsilon(t) = 0$  (définition de négligeabilité).

$$\text{Puis on observe que pour tout réel } x \neq a : \int_a^x o_a((t-a)^n) dt = (x-a)^{n+1} \times \frac{\int_a^x (t-a)^n \varepsilon(t) dt}{(x-a)^{n+1}}.$$

Posons alors :  $\varphi(x) = \frac{\int_a^x (t-a)^n \varepsilon(t) dt}{(x-a)^{n+1}}$ , et montrons que  $\varphi(x)$  tend vers 0 quand  $x$  tend vers  $a$ , ce que l'on fait en revenant à la définition de limite.

Fixons  $\beta > 0$ . Puisque  $\lim_{t \rightarrow a} \varepsilon(t) = 0$ , il existe un réel  $\alpha$  tel que  $|t-a| < \alpha \implies |\varepsilon(t)| < \beta$ . Ainsi :

$$|x-a| < \alpha \implies |\varphi(x)| < \frac{1}{|x-a|^{n+1}} \times \beta \int_a^x |t-a|^n dt \quad \text{d'où} \quad |x-a| < \alpha \implies |\varphi(x)| < \frac{\beta}{n+1}.$$

En particulier :  $|x-a| < \alpha \implies |\varphi(x)| < \beta$ , et on a donc établi que :  $\forall \beta > 0, \exists \alpha > 0, |x-a| < \alpha \implies |\varphi(x)| < \beta$ .

Ce qui signifie que  $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 0$ , et donc :  $\int_a^x o_a((t-a)^n) dt = o_a((x-a)^{n+1})$ .

Finalement, on a :  $\forall x \in I, f(x) = \left[ \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right] + o_a((x-a)^{n+1})$ , ce qui prouve que la propriété  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie, montre l'hérédité de la propriété, et conclut cette preuve.

\*. On admet donc que :  $\int_a^x o_a((t-a)^n) dt = o_a((x-a)^{n+1})$

# BANQUE D'EXERCICES

**EXERCICE 1** — Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de  $f : x \mapsto (x^2 - 1)e^{-x}$ .

**EXERCICE 2** — Déterminer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de  $g : x \mapsto \ln(\cos(x))$ .

**EXERCICE 3** — Calcul de  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2(x)}$ .

**EXERCICE 4** — Calculs de  $\ell_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ,  $\ell_2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$  et  $\ell_3 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\sqrt{n}}$

**EXERCICE 5** — Equation de l'asymptote  $D$  à la courbe représentative de  $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \sqrt{x^2 + x + 1}$  au voisinage de  $+\infty$ , et position relative de  $\mathcal{C}_f$  et  $D$ .

**EXERCICE 6** — Calcul de  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin(x) - \sin(a)}{\sin(x - a)}$  avec  $0 < a < \frac{\pi}{2}$

**EXERCICE 7** — On rappelle que  $\mathbb{R}_2[X]$  désigne l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré au plus égal à 2. Explicitement :

$$\mathbb{R}_2[X] = \{aX^2 + bX + c, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$$

On considère l'application :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{C}^2(-1, 1[, \mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R}_2[X] \\ f &\longmapsto P_f \end{aligned}$$

où  $P_f$  désigne la partie régulière du DL à l'ordre 2 en 0 de la fonction  $f$ .

Par exemple :  $\varphi(\exp) = 1 + X + \frac{X^2}{2}$  ;  $\varphi(\sin) = X$  ;  $\varphi(\cos) = 1 - \frac{X^2}{2}$

Montrer que l'application  $\varphi$  est surjective et non-injective.

**EXERCICE 8** — Soit  $f$  la fonction définie par :  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^2 + x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Montrer que la fonction  $f$  admet un DL à l'ordre 2 en 0, mais n'est pas de classe  $\mathcal{C}^2$  en 0.

# BANQUE D'EXERCICES - CORRIGÉS

**EXERCICE 1** — Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de  $f : x \mapsto (x^2 - 1)e^{-x}$ .

Selon le cours, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

Par conséquent, pour tout réel  $x$  on a :

$$(x^2 - 1)e^{-x} = (x^2 - 1) \left( 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) + o(x^3) = -1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^2 - x^3 + o(x^3)$$

**Conclusion.**  $\forall x \in \mathbb{R}, (x^2 - 1)e^{-x} = -1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{5x^3}{6} + o(x^3)$

**EXERCICE 2** — Déterminer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de  $g : x \mapsto \ln(\cos(x))$ .

Soit  $x$  un réel "proche de zéro", par exemple dans  $I = ]-1, 1[.^\dagger$

On a :  $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$ .

D'où :  $\ln(\cos(x)) = \ln\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)$      ( $\spadesuit$ ).

Par ailleurs :  $\ln(1 - X) = -X - \frac{X^2}{2} + o(X^2)$ .

En posant  $X = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}$  dans la relation ( $\spadesuit$ ), on obtient :

$$\ln(\cos(x)) = -\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}\right) - \frac{\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}\right)^2}{2} + o(x^4)$$

Ainsi :

$$\ln(\cos(x)) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^4}{8} + o(x^4)$$

**Conclusion.**  $\forall x \in I, \ln(\cos(x)) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)$

**EXERCICE 3** — Calcul de  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2(x)}$ .

Ecrivons un DL à l'ordre 4 en 0 de  $\sin^2(x)$ .

D'après le cours :  $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$ . Par suite :  $\sin^2(x) = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)$ .

On en déduit que :  $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2(x)} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)} = \frac{1}{x^2} \left[ 1 - \frac{1}{1 - \frac{x^2}{3} + o(x^2)} \right]$      ( $\spadesuit$ )

Par ailleurs, d'après le cours encore :  $\frac{1}{1 - X} = 1 + X + o(X)$ .

On en déduit que :  $\frac{1}{1 - \frac{x^2}{3} + o(x^2)} = 1 + \frac{x^2}{3} + o(x^2)$ . D'où :  $1 - \frac{1}{1 - \frac{x^2}{3} + o(x^2)} = -\frac{x^2}{3} + o(x^2)$      ( $\clubsuit$ ).

D'après ( $\spadesuit$ ) et ( $\clubsuit$ ) :  $\left[ \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2(x)} \right] \sim_0 \frac{1}{x^2} \times \left( -\frac{x^2}{3} \right)$ . **Conclusion.**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2(x)} = -\frac{1}{3}$

$\dagger$ . Pour s'assurer que le réel  $\ln(\cos(x))$  est bien défini.

**EXERCICE 4** — Calculs de  $\ell_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ,  $\ell_2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$  et  $\ell_3 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\sqrt{n}}$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^{n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}; \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} = e^{n^2 \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} \quad \text{et} \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\sqrt{n}} = e^{\sqrt{n} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}$$

Or :  $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim_{+\infty} \frac{1}{n}$ . On en déduit que :

$$n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim_{+\infty} 1; \quad n^2 \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim_{+\infty} n \quad \text{et} \quad \sqrt{n} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim_{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

D'où :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 0$$

**Conclusion.**  $\ell_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ ;  $\ell_2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} = +\infty$  et  $\ell_3 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\sqrt{n}} = 1$

**EXERCICE 5** — Equation de l'asymptote  $D$  à la courbe représentative de  $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \sqrt{x^2 + x + 1}$  au voisinage de  $+\infty$ , et position relative de  $\mathcal{C}_f$  et  $D$ .

Soit  $x$  un réel strictement positif. On a :  $\sqrt{x^2 + x + 1} = x \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}$ .

Par ailleurs, pour tout réel  $X > -1$ , on a :  $\sqrt{1 + X} = 1 + \frac{X}{2} - \frac{X^2}{8} + o(X^2)$ .

On pose :  $X = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$  (et on peut observer que  $X$  tend vers 0 lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ ).

On obtient alors :

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + x + 1} &= x \left[ 1 + \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{2} - \frac{\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)^2}{8} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right) \right] = x \left[ 1 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{8x^2} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right) \right] \\ &= x \left[ 1 + \frac{1}{2x} + \frac{3}{8x^2} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right) \right] = x + \frac{1}{2} + \frac{3}{8x} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

**Conclusion.** La courbe représentative de  $f$  admet au voisinage de  $+\infty$  une asymptote d'équation  $y = x + \frac{1}{2}$ ; et que la courbe est située au-dessus de son asymptote au voisinage de  $+\infty$  (signe de  $\frac{3}{8x}$ ).

**EXERCICE 6** — Calcul de  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin(x) - \sin(a)}{\sin(x-a)}$  avec  $0 < a < \frac{\pi}{2}$

On effectue un **retour à l'origine**, c'est-à-dire un changement de variable permettant de se ramener à un calcul de limite en 0, en posant :

$$X = x - a \quad (\text{donc } x = X + a)$$

Moyennant ce changement de variable, l'énoncé devient :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin(x) - \sin(a)}{\sin(x-a)} = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\sin(X+a) - \sin(a)}{\sin(X)}$$

Déterminons un équivalent de cette fraction. On a déjà :  $\sin(X) \sim_0 X$  (♠)

Par ailleurs :

$$\sin(X+a) - \sin(a) = \sin(X)\cos(a) + \sin(a)\cos(X) - \sin(a) = \sin(X)\cos(a) + \sin(a)(\cos(X) - 1)$$

Donc :  $\sin(X+a) - \sin(a) = \cos(a)X + o(X)$  d'où :  $\sin(X+a) - \sin(a) \sim_0 \cos(a)X$  (♣).

D'après (♠) et (♣) :  $\frac{\sin(X+a) - \sin(a)}{\sin(X)} \sim_0 \cos(a)$ . **Conclusion.**  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin(x) - \sin(a)}{\sin(x-a)} = \cos(a)$

**EXERCICE 7** — On rappelle que  $\mathbb{R}_2[X]$  désigne l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré au plus égal à 2. Explicitement :

$$\mathbb{R}_2[X] = \{aX^2 + bX + c, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$$

On considère l'application :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{C}^2(]-1, 1[, \mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R}_2[X] \\ f &\longmapsto P_f \end{aligned}$$

où  $P_f$  désigne la partie régulière du DL à l'ordre 2 en 0 de la fonction  $f$ .

$$\text{Par exemple : } \varphi(\exp) = 1 + X + \frac{X^2}{2}; \quad \varphi(\sin) = X; \quad \varphi(\cos) = 1 - \frac{X^2}{2}$$

Montrer que l'application  $\varphi$  est surjective et non-injective.

► **Surjectivité.** Soit  $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$ . On définit une fonction  $f$  en posant :  $\forall x \in ]-1, 1[, f(x) = ax^2 + bx + c$ .

On a :  $\forall x \in ]-1, 1[, f(x) = c + bx + ax^2 + o(x^2)$ . D'où :  $\varphi(f) = P$ .

On en déduit que tout élément  $P$  de  $\mathbb{R}_2[X]$  admet un antécédent par  $\varphi$  : l'application  $\varphi$  est surjective.

► **(Non-)injectivité.** Selon le cours :  $\varphi(\sin) = \varphi(\tan) = X$ . D'où  $\varphi$  n'est pas injective.

**Conclusion.** L'application  $\varphi$  est surjective et non-injective.

**EXERCICE 8** — Soit  $f$  la fonction définie par :  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^2 + x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Montrer que la fonction  $f$  admet un DL à l'ordre 2 en 0, mais n'est pas de classe  $\mathcal{C}^2$  en 0.

► Pour tout réel  $x$  on a :  $f(x) = x^2 + x^2\varepsilon(x)$  avec  $\varepsilon(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

Notons que :  $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$  ("limite nulle  $\times$  bornée").

Il s'ensuit que pour tout réel  $x$  on a :  $f(x) = x^2 + o(x^2)$ . Donc  $f$  admet un DL à l'ordre 2 en 0.

► Montrons à présent que la fonction  $f$  n'est pas de classe  $\mathcal{C}^2$  en 0, en prouvant qu'elle n'est pas 2 fois dérivable en 0 (càd que  $f'$  n'est pas dérivable en 0).

**Etape 1** —  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ . La fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^*$  selon les TG (tout cocktail de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}^*$  l'est), et pour tout réel  $x$  non nul :

$$f'(x) = 2x + 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

Par ailleurs, pour tout  $x \neq 0$  on a :  $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^2 + x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = x + x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

D'où :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$ . Donc  $f$  est dérivable en 0 et  $f'(0) = 0$ .

**Conclusion intermédiaire.**  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et :  $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \begin{cases} 2x + 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

**Etape 2** —  $f'$  n'est pas dérivable en 0. Pour tout réel  $x$  non nul, on a :

$$\frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \frac{2x + 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x \cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = 2 + 3x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

Il est clair que  $2 + 3x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$  admet une limite finie (égale à 2) lorsque  $x$  tend vers 0.

En revanche,  $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$  n'a pas de limite lorsque  $x$  tend vers 0 (c'est une application de la propriété de limite séquentielle (chapitre 14)).

Donc  $\frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0}$  n'a pas de limite lorsque  $x$  tend vers 0 ;  $f'$  n'est pas dérivable en 0.

**Bilan.** La fonction  $f$  n'est pas 2 fois dérivable en 0, donc n'est pas de classe  $\mathcal{C}^2$  en 0.

**Conclusion.** La fonction  $f$  admet un DL à l'ordre 2 en 0, mais n'est pas de classe  $\mathcal{C}^2$  en 0.

*Remarque.* La fonction  $f$  fournit un contre-exemple à la réciproque de l'implication donnée par la formule de Taylor-Young. En effet, suivant cette formule, on a :

$$[f \text{ de classe } \mathcal{C}^2 \text{ au voisinage de } 0] \implies [f \text{ admet un DL à l'ordre 2 en } 0]$$

La réciproque est donc fausse, d'après l'exemple étudié dans cet exercice.