Devoir surveillé n^{0}8

Mathématiques

Durée : 4 heures

CONSIGNES

— **Dans ce sujet, l'exercice 1 et le problème 1 sont communs à tous les candidats.**

Puis les candidats traiteront au choix un (unique) problème : 2-A ou 2-B.

Le choix devra être indiqué clairement sur la copie, en haut et à droite de la première page.

— **Tout matériel électronique est interdit.**

— **Les résultats doivent être soulignés ou $\boxed{\text{encadrés}}$.**

Barème approximatif :

- **Exercice 1 : 15pts**
- **Prob 1 : 33pts (7+10+12+4)**
- **Prob 2A : 21pts (11+10)**
- **Prob 2B : 28pts (6+10+12)**

Exercice 1 — (Etude d'une suite récurrente).

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \ln\left(1 + x + \sqrt{1 + (1+x)^2}\right)$$

Et soit (u_n) la suite réelle définie en posant :

$$u_0 \in [0,2], \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$$

1/ Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+(1+x)^2}}$.

2/ Pour tout réel $x \in [0,2]$, on pose : $g(x) = f(x) - x$. Etablir que g réalise une bijection de $[0,2]$ vers un intervalle que l'on précisera.

3/ Etablir que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution dans $[0,2]$, que l'on notera ℓ.

4/ Etablir que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \ell| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,|u_n - \ell|$

5/ Etablir que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \ell| \leqslant 2^{1-\frac{n}{2}}$

6/ Déduire de ce qui précède que (u_n) converge, et préciser sa limite.

7/ **Valeur approchée de ℓ, et majoration de l'erreur commise**.

Dans les deux questions ci-dessous, on suppose que $u_0 = 0$.

L'objectif des 2 questions indépendantes ci-dessous est de déterminer une valeur approchée de ℓ, ainsi qu'une majoration de l'erreur commise. La première approche est numérique, et la seconde est théorique.

a/ Ecrire en langage Python une fonction `Vapp(epsilon)` qui reçoit comme paramètre un flottant `epsilon` strictement positif, et qui renvoie une valeur approchée de ℓ à `epsilon` près.

On pourra supposer que la fonction f a déjà été préalablement définie, et que le code ci-dessous a déjà été rédigé *(cette partie de code ne doit pas être reproduite sur votre copie)*.

```
from math import *

def f(x):
        return log(1+x+sqrt(1+x**2)) # En Python, 'log' désigne le logarithme népérien
```

b/ Soit p un entier naturel. Résoudre l'inéquation (d'inconnue $n \in \mathbb{N}$) : $2^{1-\frac{n}{2}} \leqslant 10^{-p}$

En déduire un entier n_0 tel que u_{n_0} est une valeur approchée à 10^{-p} près de ℓ.

—— Problème 1 — Capacités numériques ——

Problématique. *Il existe différentes méthodes pour calculer une valeur approchée de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment $[a,b]$. L'objectif principal de ce problème est de montrer que les méthodes présentées en Physique convergent en effet, et de comparer leurs vitesses de convergence.*

Partie 1 - Questions préliminaires

Dans ce paragraphe, f désigne une fonction continue sur $[a,b]$ (avec $a<b$) et à valeurs réelles.

1/ Relation de Chasles généralisée. Démontrer par récurrence que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\,(y_0, y_1, \ldots, y_n) \in [a,b]^{n+1}, \quad \sum_{k=0}^{n-1} \int_{y_k}^{y_{k+1}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{y_0}^{y_n} f(x)\,\mathrm{d}x$$

2/ Un lemme de majoration.

a/ Etablir que : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$

b/ En déduire soigneusement que : $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$

Indication. On distinguera deux cas suivant que $\displaystyle\int_a^b f$ *est positive ou négative.*

3/ Inégalité triangulaire généralisée.

On admet que : $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |x+y| \leqslant |x| + |y|$.

Démontrer par récurrence que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\,(u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n,\ \left|\sum_{k=1}^{n} u_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |u_k|$$

Notations. A partir de maintenant, et jusqu'à la fin du problème.

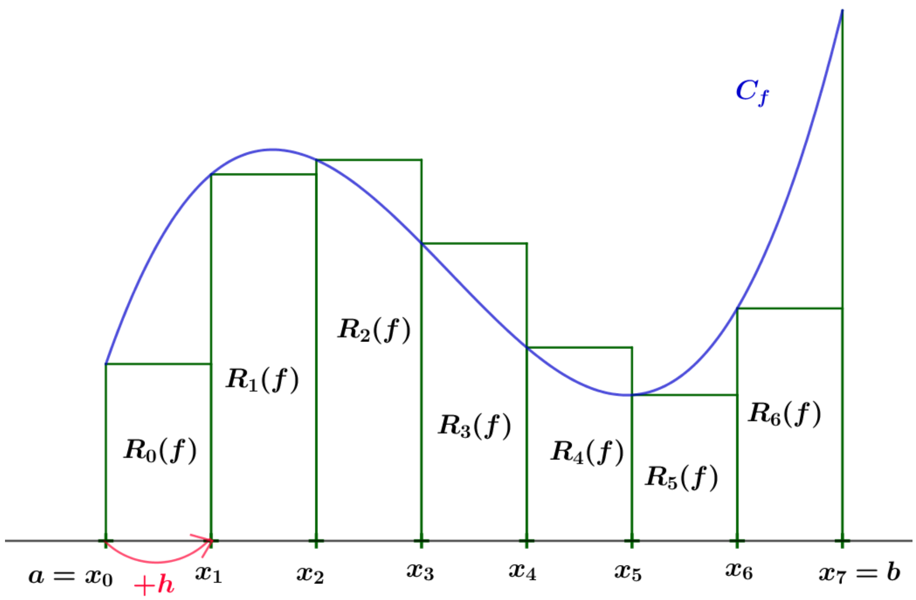
- ➤ a et b sont deux réels, avec $a<b$; et n désigne un entier naturel non nul.
- ➤ On note $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ la subdivision régulière de $[a,b]$ de pas $h = \dfrac{b-a}{n}$, c'est à dire que :

$$\forall\, k \in [\![\, 0, n \,]\!],\ x_k = a + kh$$

Partie 2 - Méthode des rectangles à gauche

Tout au long de la partie 2, on suppose que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$.

Dans cette partie, on approche f sur chacun des segments $[x_k, x_{k+1}]$ par la fonction constante égale $f(x_k)$. On note $R_k(f)$ l'aire algébrique du rectangle construit sur le segment $[x_k, x_{k+1}]$, et de "hauteur" $f(x_k)$; et on note $R^n(f) = \sum_{k=0}^{n-1} R_k(f)$. La figure ci-dessous illustre cette construction.



Enfin, on note $I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

4/ Justifier que :

$$I - R^n(f) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left(f(x) - f(x_k)\right) \mathrm{d}x$$

5/ Justifier qu'il existe un réel M_1 tel que :

$$\forall\, x \in [a,b],\ |f'(x)| \leqslant M_1$$

6/ Soit $k \in [\![\, 0, n-1 \,]\!]$. Démontrer que pour tout réel $x \in [x_k, x_{k+1}]$ on a :

$$|f(x) - f(x_k)| \leqslant M_1\,(x - x_k)$$

7/ A l'aide de la question précédente, établir que :

$$\forall\, k \in [\![\, 0, n-1 \,]\!], \quad \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left(f(x) - f(x_k)\right) \mathrm{d}x \right| \leqslant M_1 \frac{(b-a)^2}{2n^2}$$

8/ En déduire que :

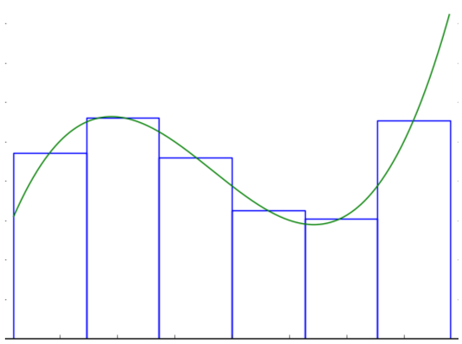
$$|I - R^n(f)| \leqslant M_1 \frac{(b-a)^2}{2n}$$

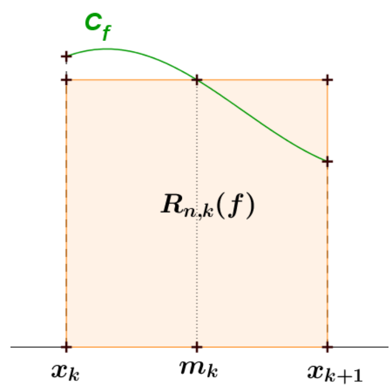
Partie 3 - Méthode des rectangles médians

Tout au long de la partie 3, on suppose que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a, b]$.

Par ailleurs dans cette partie, on approche f sur chacun des segments $[x_k, x_{k+1}]$ par la fonction constante égale $f(m_k)$, où $m_k = \dfrac{x_k + x_{k+1}}{2}$ désigne le milieu du segment $[x_k, x_{k+1}]$.

On note $R_{n,k}(f)$ l'aire algébrique du rectangle construit sur le segment $[x_k, x_{k+1}]$, et de "hauteur" $f(m_k)$; et on note $R_n(f) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} R_{n,k}(f)$. Les figures ci-dessous illustrent cette construction.





9/ Justifier que : $$I - R_n(f) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} [f(x) - f(m_k)] \, dx$$

10/ Estimation de l'erreur. Soient c et d deux réels quelconques de $[a, b]$, avec $c < d$.

a/ Soit A un nombre réel. On définit une fonction Φ sur $[c, d]$ en posant :

$$\forall x \in [c, d], \ \Phi(x) = f(d) - f(x) - (d - x) f'(x) - A \frac{(d-x)^2}{2}$$

Etablir qu'il existe une unique valeur de A, que l'on calculera *, tel que : $\Phi(c) = \Phi(d) = 0$.

b/ On suppose à présent que A est l'unique réel déterminé à la question précédente. Etablir que :

$$\exists \alpha \in \,]c, d[\, , \ A = f''(\alpha)$$

c/ En déduire que : $f(d) = f(c) + (d - c) f'(c) + \dfrac{(d-c)^2}{2} f''(\alpha)$

d/ Soit k un entier quelconque compris entre 0 et $(n-1)$. Etablir que :

$$\forall x \in [x_k, x_{k+1}], \ |f(x) - f(m_k) - (x - m_k) f'(m_k)| \leqslant M_2 \frac{(x - m_k)^2}{2}$$

où $M_2 = \displaystyle\max_{x \in [a,b]} |f''(x)|$

*. On exprimera A en fonction de c, d, $f(c)$, $f(d)$ et $f'(c)$.

e/ En déduire que :

$$\forall\, k \in [\![\, 0, n-1 \,]\!],\ |I_k - R_{n,k}(f)| \leqslant M_2\, \frac{(b-a)^3}{24n^3}$$

puis que : $|I - R_n(f)| \leqslant M_2\, \dfrac{(b-a)^3}{24n^2}$

Partie 4 - Programmation en Python

Ecrire en langage Python une fonction `RM(f,a,b,n,M2)` qui reçoit comme paramètres une fonction `f`, trois flottants `a, b` et `M2`, et un entier `n`, et qui retourne la valeur de $R_n(f)$ (valeur approchée de $I = \displaystyle\int_a^b f$) obtenue par la méthode des rectangles médians, ainsi qu'une majoration de l'erreur commise (càd un majorant de $|I - R_n(f)|$).
On pourra supposer que la fonction f a déjà été préalablement définie.

Problème 2A — Arithmétique

Notations. On rappelle que pour tout m entier relatif, $m\mathbb{Z}$ désigne l'ensemble des multiples de m.

Par ailleurs, on note $\mathscr{P}$ l'ensemble des nombres premiers. On admet dans ce problème que $53 \in \mathscr{P}$.

Partie 1 - Autour du nombre 53

1/ Etablir que les entiers 38 et 53 sont premiers entre eux.

2/ Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $(E_1) \quad 38x + 53y = 6$.

3/ Soit m un entier relatif. Montrer que :

$$[\, m \text{ est un inverse de 38 modulo } 53\,] \Longleftrightarrow [\exists\, k \in \mathbb{Z},\ m = 60 + 53\, k]$$

4/ Soit $n \in \mathbb{Z}$, tel que $n \notin 53\mathbb{Z}$. A l'aide du petit théorème de Fermat, établir que :

$$53 | n^{52} - 1$$

5/ Etablir qu'il n'existe pas de triplet d'entiers $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ tel que : $x^{520} + y^{520} + z^{520} = 20 + 53 \times 11^{2024}$.

Partie 2 - Une infinité de premiers $p \equiv 1\ [4]$

La fin de ce problème consiste à établir qu'il existe une infinité de nombre premiers congrus à 1 modulo 4 (comme 53).

Raisonnons par l'absurde, et supposons qu'il existe seulement un nombre fini p_1, p_2,. . ., p_m de nombres premiers congrus à 1 modulo 4.

On pose : $N = 1 + 4 \times \left(\displaystyle\prod_{k=1}^{m} p_k^2 \right)$ soit : $N = 1 + 4\,(p_1 \times \cdots \times p_m)^2$.

Soit p un diviseur premier de N.

6/ Justifier que $p \geqslant 3$.

7/ On note : $x = 2 \displaystyle\prod_{k=1}^{m} p_k$. Calculer $x^2 + 1$ modulo p.

8/ Etablir que p ne divise pas x. En déduire que : $x^{p-1} \equiv 1\ [p]$.

9/ Justifier que $\dfrac{p-1}{2}$ est un entier naturel, et établir que : $(-1)^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1\ [p]$.

10/ En déduire que : $p \equiv 1\ [4]$. En exhibant une contradiction, conclure.

Problème 2B — Groupe des automorphismes de $\mathbb{U}_n$

Rappels et notations. Soit n un entier naturel $\geqslant 2$.

On note $(\mathbb{U}_n, \times)$ le groupe des racines n-èmes de l'unité.

On note $\boldsymbol{\omega_n}$ la première racine n-ème de l'unité non-triviale, c'est-à-dire :

$$\boldsymbol{\omega_n = \mathrm{e}^{2i\pi/n}} \qquad \text{Ainsi : } \quad \boldsymbol{\mathbb{U}_n = \left\{\omega_n^k,\ k \in [\![\, 0, n-1 \,]\!]\right\}}$$

Un ***endomorphisme*** du groupe $(\mathbb{U}_n, \times)$ est un morphisme de groupes de $(\mathbb{U}_n, \times)$ dans $(\mathbb{U}_n, \times)$, c'est-à-dire une application $f : \mathbb{U}_n \longrightarrow \mathbb{U}_n$ telle que :

$$\forall\, (z_1, z_2) \in \mathbb{U}_n^2, \quad f\,(z_1 \times z_2) = f\,(z_1) \times f\,(z_2)$$

Un ***automorphisme*** du groupe $(\mathbb{U}_n, \times)$ est un endomorphisme du groupe $\mathbb{U}_n$ bijectif.

On note $\mathrm{End}(\boldsymbol{\mathbb{U}_n})$ l'ensemble des endomorphismes du groupe $\mathbb{U}_n$.

On note $\mathrm{Aut}(\boldsymbol{\mathbb{U}_n})$ l'ensemble des automorphismes du groupe $\mathbb{U}_n$. On peut observer que : $\mathrm{id}_{\mathbb{U}_n} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{U}_n)$.

On admettra que $\boldsymbol{(\mathrm{Aut}(\mathbb{U}_n), \circ)}$ est un groupe pour la composition des applications.

Partie 1 - Questions préliminaires

1/ Soit $f \in \mathrm{End}(\mathbb{U}_n)$. Justifier brièvement que : $\qquad f(1) = 1$

2/ Soit $f \in \mathrm{End}(\mathbb{U}_n)$, et soit $z \in \mathbb{U}_n$. Etablir que : $\qquad \forall\, m \in \mathbb{N},\ f\,(z^m) = f\,(z)^m$

3/ Dans cette question, on prouve qu'un endomorphisme du groupe $\mathbb{U}_n$ est uniquement déterminé par l'image de ω_n. A cette fin, on considère deux éléments f et g de $\mathrm{End}(\mathbb{U}_n)$.

a/ Justifier brièvement que : $\qquad \mathrm{Im}(f) = \left\{(f\,(\omega_n))^k,\ k \in [\![\, 0, n-1 \,]\!]\right\}$

b/ Etablir que :

$$[f(\omega_n) = g\,(\omega_n)] \Longleftrightarrow [\forall\, z \in \mathbb{U}_n, \quad f(z) = g(z)]$$

Partie 2 - Les cas $n = 4$ et $n = 5$

4/ **Le groupe Aut**$(\mathbb{U}_4)$.

Dans cette question, pour tout $k \in [\![\, 0, 3 \,]\!]$, on note f_k l'endomorphisme de $\mathbb{U}_4$ défini en posant $f_k(\mathrm{i}) = \mathrm{i}^k$.

a/ Etablir que $\mathrm{Im}(f_3) = \mathbb{U}_4$. En déduire que $f_3 \in \mathrm{Aut}(\mathbb{U}_4)$.

b/ Etablir que $\mathrm{Im}(f_2) = \mathbb{U}_2$. En déduire que $f_2 \notin \mathrm{Aut}(\mathbb{U}_4)$.

Remarque : on peut en déduire que le groupe $\mathrm{Aut}\,(\mathbb{U}_4)$ *est de cardinal* 2*, car il ne contient que* $f_1 = \mathrm{id}_{\mathbb{U}_4}$*, et* f_3.

5/ Le groupe Aut$(\mathbb{U}_5)$.

Dans cette question, on note $\omega_5 = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/5}$, et pour tout $k \in [\![0,4]\!]$, on note g_k l'endomorphisme de $\mathbb{U}_5$ défini en posant $g_k(\omega_5) = \omega_5^k$.

a/ Déterminer le noyau de g_0. En déduire que $g_0 \notin \mathrm{Aut}(\mathbb{U}_5)$.

b/ Justifier que : $\quad g_2 \circ g_3 = \mathrm{id}_{\mathbb{U}_5} = g_3 \circ g_2$

c/ Justifier que g_4 est une involution.

d/ En déduire que le groupe $\mathrm{Aut}\,(\mathbb{U}_5)$ est de cardinal 4, et qu'il est abélien.

Partie 3 - Arithmétique des automorphismes de $\mathbb{U}_n$

Dans cette partie, on note $\omega_n = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/n}$ (où n désigne un entier naturel $\geqslant 2$).

Soit $\ell \in [\![1, n-1]\!]$. On note h_ℓ l'endomorphisme de $\mathbb{U}_n$ défini en posant :

$$h_\ell\,(\omega_n) = \omega_n^\ell$$

On peut alors observer que : $\quad \mathrm{Im}\,(h_\ell) = \left\{\omega_n^{k\ell},\, k \in [\![0, n-1]\!]\right\}$

6/ Soit N un entier naturel. Etablir que :

$$\left[\omega_n^N = 1\right] \Longleftrightarrow [n \text{ divise } N]$$

7/ Etablir que :

$$[n \wedge \ell = 1] \Longrightarrow \left[\mathrm{Card}\left\{\omega_n^{k\ell},\, k \in [\![0, n-1]\!]\right\} = n\right]$$

Indication. Sans que ce soit une obligation, on peut adopter la stratégie suivante : on commence par supposer que $n \wedge \ell = 1$, puis on raisonne par l'absurde. On suppose qu'il existe deux entiers $k < m$ dans $[\![0, n-1]\!]$ tels que $\omega_n^{k\ell} = \omega_n^{m\ell}$, et on aboutit à une contradiction.

8/ Etablir que :

$$[n \wedge \ell = 1] \Longleftrightarrow [h_\ell \in \mathrm{Aut}(\mathbb{U}_n)]$$

9/ Soit p un nombre premier. Etablir que : $\quad \mathrm{Card}\,(\mathrm{Aut}\,(\mathbb{U}_p)) = p - 1$

10/ Soient p un nombre premier, et $\alpha \in \mathbb{N}^*$. Etablir que : $\quad \mathrm{Card}\,(\mathrm{Aut}\,(\mathbb{U}_{p^\alpha})) = p^\alpha - p^{\alpha-1}$