Exercices 19 — Polynômes

Exercice 1. — (Degré et coefficient dominant)

1/ Calculer le degré et le coefficient dominant de $P = (1+X)^2 + (1-X)^2$

On a : $P = 2X^2 + 2$. D'où : $\deg(P) = 2$ et $\text{cd}(P) = 2$.

2/ Calculer le degré et le coefficient dominant de $P = (1+X)^3 + (1-X)^3$

On a : $P = 6X^2 + 2$. D'où : $\deg(P) = 2$ et $\text{cd}(P) = 6$.

3/ Soit n un entier naturel non nul. Calculer le degré et le coefficient dominant de $P = (1+X)^n + (1-X)^n$

On a : $P = X^n + nX^{n-1} + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} X^k$ et $Q = (-1)^n X^n + (-1)^{n-1} nX^{n-1} + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} (-1)^k X^k$.

Lorsque n est pair, on a : $P+Q = 2X^n + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \left(1+(-1)^k\right) X^k$. D'où : $\deg(P+Q) = n$ et $\text{cd}(P+Q) = 2$.

Lorsque n est impair, on a : $P+Q = 2nX^{n-1} + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} \left(1+(-1)^k\right) X^k$. D'où : $\deg(P+Q) = n-1$ et $\text{cd}(P+Q) = 2n$.

Exercice 2. — (Utilisation du degré) Soit n un entier naturel.

Prouver qu'il n'existe aucun polynôme P tel que : $P^2 = X\left(X^{2n}+1\right)$

Le polynôme nul n'est clairement pas solution de l'équation.

Supposons qu'il existe un polynôme non nul P solution. Notons alors : $m = \deg(P) \in \mathbb{N}$.

Puisque P est solution de l'équation, on a : $\deg(P^2) = \deg\left(X\left(X^{2n}+1\right)\right)$.

D'où : $2m = 2n+1$, ce qui est assez clairement absurde, d'où la conclusion.

Exercice 3. — Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ solutions de l'équation :

$$\text{(E)} \qquad P\left(X^2\right) = \left(X^2+1\right) P(X)$$

Le polynôme nul est solution de l'équation.

Supposons à présent P non nul, et notons $n = \deg P$.

Si P est solution de l'équation, alors : $\deg P\left(X^2\right) = \deg\left(X^2+1\right) P(X)$ soit : $2n = n+2$ d'où $n = 2$.

On cherche donc P sous la forme d'un polynôme de degré 2 : $P = aX^2 + bX + c$ avec $a \neq 0$.

Alors : $P\left(X^2\right) = \left(X^2+1\right) P(X) \Longleftrightarrow aX^4 + bX^2 + c = aX^4 + bX^3 + (c+a)X^2 + bX + c$.

Par identification, on en déduit que $b = 0$ et $c = -a$.

Donc : P non nul solution $\Longrightarrow \ \exists\, a \in \mathbb{K}^*,\ P = aX^2 - a$. La réciproque est une vérification immédiate.

Puisque le polynôme nul est également solution, on peut conclure.

Conclusion. L'ensemble des solutions de l'équation est $\left\{a\left(X^2-1\right),\ a \in \mathbb{K}\right\}$.

Exercice 4. — **(Utilisation du degré et du coefficient dominant)** Déterminer tous les polynômes P tels que

$$P^2 = 4P$$

Le polynôme nul est clairement solution de l'équation.

Supposons à présent qu'il existe un polynôme non nul P solution, et notons : $n = \deg(P) \in \mathbb{N}$.

Puisque P est solution de l'équation, on a : $\deg(P^2) = \deg(4P)$.

D'où : $2n = n$, d'où $n = 0$. On en déduit que P est constant (non nul). D'où : $P = 4$.

Conclusion. Il existe exactement deux polynômes P tels que $P^2 = 4P$: les polynômes constants $\widetilde{0}$ et $\widetilde{4}$.

Exercice 5. — **(Utilisation du degré et du coefficient dominant)** Déterminer tous les polynômes P tels que

$$P^3 = X^2 P$$

Le polynôme nul est clairement solution de l'équation.

Soit P un polynôme non nul solution de l'équation. Notons : $\deg P = n \in \mathbb{N}$.

Par hypothèse : $\deg\left(P^3\right) = \deg(X^2 P) \Longleftrightarrow 3n = 2 + n \Longleftrightarrow n = 1$.

On en déduit que si P (non nul) est solution, alors il est nécessairement de degré 1.

Ceci nous conduit à rechercher les polynômes P (non nuls) solutions sous la forme : $P = aX + b$ (avec a et b scalaires, $a \neq 0$).

On obtient alors : $P^3 = X^2 P \Longleftrightarrow (aX+b)^3 = X^2(aX+b) \Longleftrightarrow a^3X^3 + 3a^2bX^2 + 3ab^2X + b^3 = aX^3 + bX^2$.

Par identification (considérer les termes constants de part et d'autre), on en déduit que $b = 0$ et $a^3 = a$. La deuxième équation est équivalente à $a = 0$ (exclus par hyp) ou $a = 1$ ou $a = -1$.

On en déduit qu'il existe exactement deux polynômes non nuls solutions : X et $-X$.

Conclusion. L'équation $P^3 = X^2 P$ possède exactement 3 solutions dans $\mathbb{K}[X]$, qui sont : $\widetilde{0}$, X et $-X$.

Exercice 6. — **(Division euclidienne)**. Effectuer la division euclidienne de $A = 5X+7$ par $B = X^3+2$, puis celle de B par A.

Puisque $\deg(A) < \deg(B)$, la première division euclidienne est triviale : $5X+7 = (X^3+2) \times \underbrace{\widetilde{0}}_{\text{quotient}} + \underbrace{5X+7}_{\text{reste}}$.

Pour la seconde, on obtient : $X^3 + 2 = (5X+7)\underbrace{\left(\frac{1}{5}X^2 - \frac{7}{25}X + \frac{49}{125}\right)}_{\text{quotient}} \underbrace{- \frac{93}{125}}_{\text{reste}}$

Exercice 7. — **(Division euclidienne)**. Effectuer la division euclidienne de $A = 2X^4 - 3X^3 + 4X^2 - 5X + 6$ par $B = X^2 - 3X + 1$.

On a : $2X^4 - 3X^3 + 4X^2 - 5X + 6 = (X^2 - 3X + 1)\underbrace{(2X^2 + 3X + 11)}_{\text{quotient}} + \underbrace{25X - 5}_{\text{reste}}$

Exercice 8. — (Division euclidienne). A quelle condition le polynôme $X^4 + aX^2 + bX + c$ est-il divisible par $X^2 + X + 1$?

D'après le cours, le polynôme $A = X^4 + aX^2 + bX + c$ est divisible par $B = X^2 + X + 1$ si et seulement si le reste dans la division euclidienne de A par B est nul.

On effectue donc la division euclidienne de A par B.

Ce faisant on obtient : $X^4 + aX^2 + bX + c = (X^2 + X + 1)\underbrace{\left(X^2 - X + a\right)}_{\text{quotient}} + \underbrace{(b - a + 1)\, X + c - a}_{\text{reste}}$

Le reste dans la division euclidienne de A par B est donc : $R = (b - a + 1)\, X + c - a$.

On en déduit que : $R = \widetilde{0} \Longleftrightarrow \begin{cases} b - a + 1 = 0 \\ c - a = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} b = a - 1 \\ c = a \end{cases}$

Conclusion. Le polynôme $A = X^4 + aX^2 + bX + c$ est divisible par $B = X^2 + X + 1$ si et seulement si $c = a$ et $b = a - 1$.

Exercice 9. — (Inversibles de $\mathbb{K}[X]$) Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Déterminer $\mathbb{K}[X]^*$.

Seconde formulation. Quels sont les polynômes de l'anneau $\mathbb{K}[X]$ inversibles pour la multiplication ?

Troisième formulation. Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ pour lesquels il existe un polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$ tels que $PQ = 1$.

Soit $P \in \mathbb{K}[X]^*$. Alors il existe un polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $PQ = 1$. On en déduit que $\deg(PQ) = 0$.

D'où : $\deg P + \deg Q = 0$. Ce qui implique que : $\deg P = 0$ (et $\deg Q = 0$). Donc $P \in \mathbb{K}^*$.

Ce raisonnement prouve l'inclusion : $\mathbb{K}[X]^* \subset \mathbb{K}^*$.

L'inclusion réciproque est triviale.

Conclusion. $\mathbb{K}[X]^* = \mathbb{K}^*$**. Les polynômes inversibles pour la multiplication dans** $\mathbb{K}[X]$ **sont exactement les polynômes constants non nuls.**

Exercice 10. — (Utilisation du coefficient dominant) Déterminer tous les polynômes P tels que

$$P = XP'$$

où P' désigne le polynôme dérivé de P.

Il est assez clair que le polynôme nul est solution, et que tout polynôme constant non nul ne l'est pas.

A partir de maintenant, on pourra donc supposer que P est un polynôme non constant, càd de degré $n \in \mathbb{N}^*$.

Si un tel polynôme P est solution, alors : $P = XP'$.

La comparaison des degrés ne donne ici pas d'information décisive.
En effet, on a $\deg P = n$ et $\deg XP' = \deg X + \deg P' = 1 + (n - 1) = n$.

L'idée est donc de comparer les coefficients dominants de chaque terme.

On a : $\mathrm{cd}\,(XP') = \mathrm{cd}(X) \times \mathrm{cd}(P') = 1 \times n\mathrm{cd}(P)$.

Par suite : $P = XP' \Longrightarrow \mathrm{cd}(P) = n\mathrm{cd}(P)$. D'où $n = 1$ (puisque $\mathrm{cd}(P) \neq 0$ par définition de coefficient dominant).

Conclusion intermédiaire. Si un polynôme P non constant est solution, alors il est de degré 1.

On recherche donc les solutions sous la forme : $P = aX + b$, avec a et b scalaires, a non nul. Un tel polynôme est solution ssi :

$$P = XP' \Longleftrightarrow ax + b = aX \Longleftrightarrow b = 0$$

L'ensemble des polynômes de degré 1 solutions de l'équation sont donc les polynômes aX avec a scalaire non nul.

Puisque l'on a déjà observé que le polynôme nul est solution, on peut conclure :

L'ensemble des solutions de $P = XP'$ est $\{aX,\ a \in \mathbb{K}\}$.

Exercice 11. — (Division euclidienne) Le reste de la division euclidienne d'un polynôme P par $(X-2)$ est 3 et par $(X+2)$ est 2. Quel est le reste de la division euclidienne de P par (X^2-4) ?
D'après le théorème de la division euclidienne, il existe un unique couple (Q, R) tel que :

$$P = (X^2-4)Q + R \quad (\clubsuit) \qquad \text{et} \qquad \deg R < 2$$

La condition sur le degré de R entraîne que : $\exists (a,b) \in \mathbb{K}^2,\ R = aX + b \qquad (\spadesuit)$.

Le but de l'exercice est donc de déterminer a et b.

A cette fin, on exploite les hypothèses données dans l'énoncé.

Puisque le reste de la division euclidienne de P par $(X-2)$ est 3, il existe un polynôme Q_1 tel que :

$$P = (X-2)Q_1 + 3$$

On en déduit (évaluation en 2) que : $P(2) = 3$.

De même, puisque le reste de la division euclidienne de P par $(X+2)$ est 2, il existe un polynôme Q_2 tel que :

$$P = (X+2)Q_2 + 2$$

On en déduit (évaluation en -2) que : $P(-2) = 2$.

Par ailleurs, d'après $(\clubsuit)$: $P(2) = R(2)$ et $P(-2) = R(-2)$.

On en déduit, d'après $(\spadesuit)$ que : $P(2) = 2a + b$ et $P(-2) = -2a + b$.

Donc : $\begin{cases} 2a + b = 3 \\ -2a + b = 2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a = 1/4 \\ b = 5/2 \end{cases}$

Conclusion. Le reste dans la division euclidienne de P par (X^2-4) est le $R = \dfrac{1}{4}X + \dfrac{5}{2}$.

Exercice 12. — (Division euclidienne). Soient α et β deux éléments distincts de $\mathbb{K}$ (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), et soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$.
Déterminer le reste dans la division euclidienne de P par $Q = (X-\alpha)(X-\beta)$.

D'après le théorème de la division euclidienne, il existe un unique couple (S, R) de polynômes tel que : $P = QS + R$ et $\deg(R) < 2$.

Il s'ensuit que le reste R est de degré au plus 1, et qu'il existe donc deux scalaires tels que $R = aX + b$. On a donc :

$$P = (X-\alpha)(X-\beta)\,S + aX + b \qquad (\spadesuit)$$

En évaluant la relation ($\spadesuit$) successivement en α et en β (qui sont distincts par hypothèse), on obtient :

$$\begin{cases} P(\alpha) = a\alpha + b \\ P(\beta) = a\beta + b \end{cases}$$

La résolution (aisée) de ce système donne : $\begin{cases} a = \dfrac{P(\alpha) - P(\beta)}{\alpha - \beta} \\ b = \dfrac{\beta P(\alpha) - \alpha P(\beta)}{\beta - \alpha} \end{cases}$

Conclusion. Si $\alpha \neq \beta$, le reste dans la division euclidienne d'un polynôme P de $\mathbb{K}[X]$ par $(X-\alpha)(X-\beta)$ est

$$R = \frac{P(\alpha) - P(\beta)}{\alpha - \beta}\,X + \frac{\beta P(\alpha) - \alpha P(\beta)}{\beta - \alpha}$$

Exercice 13. — (Division euclidienne, bis). Soit α un élément de $\mathbb{K}$ (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), et soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$.

Déterminer le reste dans la division euclidienne de P par $Q = (X-\alpha)^2$.

D'après le théorème de la division euclidienne, il existe un unique couple (S, R) de polynômes tel que : $P = QS + R$ et $\deg(R) < 2$.

Il s'ensuit que le reste R est de degré au plus 1, et qu'il existe donc deux scalaires tels que $R = aX + b$. On a donc :

$$P = (X-\alpha)^2\,S + aX + b \qquad (\spadesuit)$$

Comme dans l'exo précédent, l'évaluation en α de la relation ($\spadesuit$) donne : $P(\alpha) = a\alpha + b$.

Puis on dérive ($\spadesuit$) pour obtenir : $P' = 2(X-\alpha)\,S + (X-\alpha)^2\,S' + a$, dont l'évaluation en α donne : $P'(\alpha) = a$.

En résumé, on a le système : $\begin{cases} P(\alpha) = a\alpha + b \\ P'(\alpha) = a \end{cases}$

La résolution (encore plus aisée que dans l'exo précédent) de ce système donne : $\begin{cases} a = P'(\alpha) \\ b = P(\alpha) - \alpha P'(\alpha) \end{cases}$

Conclusion. Le reste dans la division euclidienne d'un polynôme P de $\mathbb{K}[X]$ par $(X-\alpha)^2$ est :

$$R = P'(\alpha)\,X + P(\alpha) - \alpha P'(\alpha)$$

Exercice 14. — Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste dans la division euclidienne de X^n par $B = X^2 - 3X + 2$.

D'après le théorème de la division euclidienne, il existe un unique couple (Q, R) de polynômes tel que : $X^n = BQ + R$ et $\deg(R) < 2$.

Il s'ensuit que le reste R est de degré au plus 1, et qu'il existe donc deux scalaires tels que $R = aX + b$. On a donc :

$$X^n = \left(X^2 - 3X + 2\right) Q + aX + b \qquad (\spadesuit)$$

Or : $X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X-2)$.

Donc : $X^n = (X-1)(X-2)Q + aX + b$.

En évaluant en 1 et en 2 cette relation, on obtient : $\begin{cases} 1 = a + b \\ 2^n = 2a + b \end{cases} \iff \begin{cases} a = 2^n - 1 \\ b = 2 - 2^n \end{cases}$

Conclusion. Le reste dans la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2$ est :

$$R = (2^n - 1) X + 2 - 2^n$$

Exercice 15. — Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ telle que : $A^2 - 3A + 2\mathrm{I}_n = 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{K})}$.

Etablir que pour tout entier naturel N, la matrice A^N est combinaison linéaire de A et de I_n (c'est à dire qu'il existe deux scalaires a_N et b_N tels que : $A^N = a_N A + b_N \mathrm{I}_n$).

Soit N un entier naturel. D'après la question précédente : $X^N = (X^2 - 3X + 2)Q + \left(2^N - 1\right)X + 2 - 2^N$.

Par suite : $\forall N \in \mathbb{N},\ A^N = (A^2 - 3A + 2\mathrm{I}_n) Q + \left(2^N - 1\right) A + \left(2 - 2^N\right) \mathrm{I}_n$

Or : $A^2 - 3A + 2\mathrm{I}_n = 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{K})}$ par hypothèse.
Conclusion. $\forall N \in \mathbb{N},\ A^N = \underbrace{\left(2^N - 1\right)}_{=a_N} A + \underbrace{\left(2 - 2^N\right)}_{b_N} \mathrm{I}_n$.

Exercice 16. — Soit n un entier naturel. Déterminer le reste dans la division euclidienne de X^n par $X^3 - 10X^2 + 16X$.

On a : $X^3 - 10X^2 + 16X = X(X^2 - 10X + 16) = X(X-2)(X-8)$ $(\spadesuit)$
Par ailleurs, d'après le théorème de la division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$, il existe deux polynômes Q et R tels que :

$$X^n = (X^3 - 10X^2 + 16X) Q + R \qquad \text{avec} \qquad \deg R < 3$$

La condition sur R impose que : $\exists (a, b, c) \in \mathbb{K}^3,\ R = aX^2 + bX + c$

Par suite : $X^n = (X^3 - 10X^2 + 16X) Q + aX^2 + bX + c$. D'après $(\spadesuit)$ on a : $X^n = X(X-2)(X-8)Q + aX^2 + bX + c$ $(\clubsuit)$.

En observant judicieusement que le polynôme $X(X-2)(X-8)$ s'annule en 0, 2 et 8, on évalue la relation $(\clubsuit)$ en 0, 2 et 8. Ce faisant on obtient (en supposant $n \in \mathbb{N}^*$) :

$$\begin{cases} 0 = c & \text{(évaluation en 0)} \\ 2^n = 4a + 2b + c & \text{(évaluation en 2)} \\ 8^n = 64a + 8b + c & \text{(évaluation en 8)} \end{cases} \iff \begin{cases} 0 = c \\ 2^n = 4a + 2b \\ 8^n = 64a + 8b \end{cases} \iff \begin{cases} 0 = c \\ 2^n = 4a + 2b \\ 8^n - 4 \times 2^n = 48a \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 0 = c \\ b = 2^{n-1} - (8^n - 4 \times 2^n)/24 \\ (8^n - 4 \times 2^n)/48 = a \end{cases}$$

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le reste dans la division euclidienne de X^n par $(X^3 - 10X^2 + 16X)$ est

$$\left(\left(8^n - 4 \times 2^n\right)/48\right) X^2 + \left(2^{n-1} - \left(8^n - 4 \times 2^n\right)/24\right) X.$$

Le reste dans la division euclidienne de $X^0 = 1$ par $(X^3 - 10X^2 + 16X)$ est 1.

Exercice 17. — Soient m, n et p trois entiers naturels, et θ un nombre réel. Vérifier dans chacun des cas suivants que le polynôme A divise le polynôme B :

1/ $A = 2X^3 - 3X^2 + X$ et $B = (X-1)^{2n} - X^{2n} + 2X - 1$.

On a : $A = X\left(2X^2 - 3X + 1\right) = 2X\left(X - 1\right)\left(X - \dfrac{1}{2}\right)$. Pour montrer que A divise B, il suffit donc de vérifier que X, $X-1$ et $X - \dfrac{1}{2}$ divisent B, càd que 0, 1 et $\dfrac{1}{2}$ sont racines de B.

Ces trois vérifications sans difficulté faites, on peut conclure : A divise B.

2/ $A = X^2 + X + 1$ et $B = X^{3n+2} + X^{3m+1} + X^{3p}$.

On a : $A = (X - \mathrm{j})\left(X - \overline{\mathrm{j}}\right)$. Même principe que dans la question précédente : pour justifier que A divise B, il suffit de vérifier que j et $\overline{JC}$ sont racines de B. En anticipant un peu (cf exercice suivant), il suffit seulement de vérifier que j est racine de B car B est à coefficients réels, et qu'un polynôme à coefficients réels admettant pour racine un complexe z admet aussi comme racine son conjugué $\overline{z}$.

On a : $B(\mathrm{j}) = \mathrm{j}^{3n+2} + \mathrm{j}^{3m+1} + \mathrm{j}^{3p}$.

Or : $\mathrm{j}^3 = 1$. Donc : $\mathrm{j}^{3n+2} = \mathrm{j}^2$; $\mathrm{j}^{3m+1} = \mathrm{j}$ et $\mathrm{j}^{3p} = 1$.

D'où : $B(\mathrm{j}) = \mathrm{j}^2 + \mathrm{j} + 1 = 0$ puisque la somme des éléments de $\mathbb{U}_3$ est nulle.

Donc j est racine de B, et en vertu de la remarque précédente, $\overline{\mathrm{j}}$ est aussi racine de B.

Donc $(X - \mathrm{j})\left(X - \overline{\mathrm{j}}\right)$ divise B, càd A divise B.

3/ $A = X^2 - 2X\cos\theta + 1$ et $B = X^{2n} - 2X^n\cos(n\theta) + 1$ avec $\theta \in \mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z}$.[1]

Pour appliquer le même principe que dans les questions précédentes, on cherche les racines de A.

A cette fin, on résout l'équation : $z^2 - 2z\cos\theta + 1 = 0$. Son discriminant est $\Delta = 4\left(\cos^2\theta - 1\right) = -4\sin^2\theta = (2\mathrm{i}\sin\theta)^2$.

L'hypothèse faite sur θ assure que Δ est strictement négatif, et l'équation possède donc deux racines complexes conjuguées : $\cos\theta \pm \mathrm{i}\sin\theta = \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\theta}$.

Ainsi : $A = \left(X - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\left(X - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right)$.

Puisque B est à coefficients réels, il suffit de vérifier que $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ est racine de B pour parvenir à nos fins.

Or : $B\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right) = \mathrm{e}^{2n\mathrm{i}\theta} - 2\mathrm{e}^{n\mathrm{i}\theta}\cos(n\theta) + 1 = \cos(2n\theta) + \mathrm{i}\sin(2n\theta) - 2\cos^2(n\theta) - 2\mathrm{i}\sin(n\theta)\cos(n\theta) + 1$

$$2\cos^2(n\theta) - 1 + 2\mathrm{i}n\sin(n\theta)\cos(n\theta) - 2\cos^2(n\theta) - 2\mathrm{i}\sin(n\theta)\cos(n\theta) + 1 = 0$$ [2]

1. Càd que θ est un réel non multiple de π.
2. En utilisant les formules de duplication pour cos et sin : $\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1$ et $\sin(2a) = 2\sin a\cos a$.

En résumé : $B\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)=0$. Ce qui signifie que $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ est racine de B. Le polynôme B étant à coefficients réels, on en déduit que $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$ est également racine de B.

Par suite $\left(X-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\left(X-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right)$ divise B, càd : A divise B.

Exercice 18. — Soit $P\in\mathbb{R}[X]$. Etablir que si $\alpha\in\mathbb{C}$ est racine de P, alors $\bar{\alpha}$ est racine de P.

C'est une preuve de cours.

Soit $P\in\mathbb{R}[X]$, et soit $\alpha\in\mathbb{C}$ une racine de P. Supposons P non nul (sinon il n'y a rien à prouver), et notons $n=\deg(P)$. Il existe $(n+1)$ réels $a_0,\ldots,a_n$ tels que : $P=\sum_{k=0}^{n}a_kX^k$.

Puisque α est racine de P, on a : $\sum_{k=0}^{n}a_k\alpha^k=0$. En prenant les conjugués des deux termes de cette égalité, on obtient :

$$\overline{\sum_{k=0}^{n}a_k\alpha^k}=0\iff\sum_{k=0}^{n}\overline{a_k}\,\overline{\alpha}^k=0\iff\sum_{k=0}^{n}a_k\,\overline{\alpha}^k=0\iff P\left(\overline{\alpha}\right)=0$$

La première équivalence provenant de la compatibilité de la conjugaison avec l'addition, la multiplication, et l'élévation à une puissance entière ; la seconde de l'hypothèse suivant laquelle les a_k sont réels (et donc invariants par conjugaison) ; la dernière de la définition du polynôme P.

Conclusion. Soit $P\in\mathbb{R}[X]$. Si $\alpha\in\mathbb{C}$ est racine de P, alors $\bar{\alpha}$ est racine de P.

Exercice 19. — Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme : $P=X^4-X^3+2X^2-2X+4$ après avoir calculé $P(1+i)$.

➤ Calculons $P(1+i)$: on a $1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$, d'où :

$$P(1+\mathrm{i})=4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}-2\sqrt{2}\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\pi/4}+4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}-2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}+4=-4+2-2\mathrm{i}+4\mathrm{i}-2-2\mathrm{i}+4=0$$

Ainsi $1+\mathrm{i}$ est racine de P, et en vertu de l'exercice précédent, $1-\mathrm{i}$ est également racine de P.

Il s'ensuit que P est multiple de $(X-1-\mathrm{i})(X-1+\mathrm{i})$, c'est-à-dire de (X^2-2X+2).

Il existe donc un polynôme $Q\in\mathbb{R}[X]$ tel que $P=(X^2-2X+2)\,Q$, que l'on peut déterminer en effectuant la division euclidienne de P par (X^2-2X+2).

$$\begin{array}{l|l}
X^4-X^3+2X^2-2X+4 & X^2-2X+2 \\ \hline
-\left(X^4-2X^3+2X^2\right) & \\
X^3-2X+4 & X^2+X+2 \\
-\left(X^3-2X^2+2X\right) & \\
2X^2-4X+4 & \\
-\left(2X^2-4X+4\right) & \\
0 &
\end{array}$$

Par suite : $X^4-X^3+2X^2-2X+4=(X^2-2X+2)(X^2+X+2)$

➤ Or, le polynôme X^2+X+2 possède deux racines complexes conjuguées : $\left(-1\pm\mathrm{i}\sqrt{7}\right)/2$.

Conclusion. Le polynôme possède $X^4-X^3+2X^2-2X+4$ quatre racines complexes : $1\pm\mathrm{i}$ et $\dfrac{-1\pm\mathrm{i}\sqrt{7}}{2}$.

On peut d'ailleurs déduire des calculs précédents que la factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ du polynôme P est :

$$X^4 - X^3 + 2X^2 - 2X + 4 = (X - 1 - \mathrm{i})(X - 1 + \mathrm{i})\left(X - \frac{-1 + \mathrm{i}\sqrt{7}}{2}\right)\left(X - \frac{-1 - \mathrm{i}\sqrt{7}}{2}\right)$$

Et sa factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ est :

$$X^4 - X^3 + 2X^2 - 2X + 4 = (X^2 - 2X + 2)(X^2 + X + 2)$$

Exercice 20. — Factoriser le polynôme $P = X^4 + 2X^3 - 2X^2 + 2X - 3$, dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.

Indication : on pourra calculer $P(\mathrm{i})$.

On vérifie aisément que $P(\mathrm{i}) = 0$. Donc i est racine de P. Puisque P est à coefficients réels, $\bar{\mathrm{i}}$ est également racine de P.

Donc $(X - \mathrm{i})\left(X - \bar{\mathrm{i}}\right) = X^2 + 1$ divise P (c'est ce que l'on a vu en cours hier).

On effectue alors la division euclidienne de P par $X^2 + 1$ pour obtenir : $P = (X^2 + 1)(X^2 + 2X - 3)$, puis : $P = (X^2 + 1)(X - 1)(X + 3)$.

Conclusion. Dans $\mathbb{R}[X]$, on a : $P = (X^2 + 1)(X - 1)(X + 3)$ (P ne peut pas être factorisé davantage, car $X^2 + 1$ n'a pas de racines réelles).

Dans $\mathbb{C}[X]$, on a : $P = (X - \mathrm{i})(X + \mathrm{i})(X - 1)(X + 3)$.

Exercice 21. — Etablir qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$, que l'on déterminera, tel que :

$$P(-1) = 1\,; \qquad P(0) = -2 \qquad \text{et } P(2) = 1$$

On peut construire les polynômes de Lagrange L_{-1}, L_0 et L_2 associés aux réels -1, 0 et 2.

De manière analogue à ce qui est écrit dans le cours, on obtient :

$$L_{-1} = \frac{1}{3}X(X-2)\,; \qquad L_0 = -\frac{1}{2}(X+1)(X-2)\,; \qquad L_2 = \frac{1}{6}X(X+1)$$

On pose alors : $P = L_{-1} - 2L_0 + L_2$. Puisque L_{-1}, L_0 et L_2 sont de degré 2 et à coefficients réels, P est un polynôme de $\mathbb{R}_2[X]$.

De plus : $P(-1) = L_{-1}(-1) - 2L_0(-1) + L_2(-1) = 1 - 2 \times 0 + 0 = 1$ (par construction des polynômes de Lagrange).

On vérifie de la même façon que $P(0) = -2$ et $P(2) = 1$.

Prouvons l'unicité de P : s'il existe un autre polynôme Q de degré au plus 2 tel que $Q(-1) = 1$, $Q(0) = -2$ et $Q(2) = 1$, alors P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$ prenant les mêmes valeurs en 3 points : d'après le principe du prolongement algébrique, ils sont égaux.

Conclusion. Il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que :

$$P(-1) = 1\,; \qquad P(0) = -2 \qquad \text{et } P(2) = 1$$

qui est : $P = L_{-1} - 2L_0 + L_2$.

Exercice 22. — Soient α_1, α_2, α_3 et α_4 quatre réels, deux à deux distincts.

Etablir que l'application :

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}_3[X] &\longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ P &\longmapsto (P(\alpha_1), P(\alpha_2), P(\alpha_3), P(\alpha_4)) \end{aligned}$$

est bijective.

L'application F est bijective si tout élément (x, y, z, t) de $\mathbb{R}^4$ admet un unique antécédent par F.

En d'autres termes, montrer que F est bijective revient à montrer qu'il existe un unique polynôme P de $\mathbb{R}_3[X]$ tel que :

$$P(\alpha_1) = x\,; \qquad P(\alpha_2) = y\,; \qquad P(\alpha_3) = z\,; \qquad P(\alpha_4) = t$$

C'est donc une généralisation de l'exercice précédent. La stratégie pour le résoudre est donc la même : on construit les polynômes interpolateurs de Lagrange L_1,..., L_4 associés à α_1,..., α_4.

Explicitement :

$$L_1 = \frac{1}{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_1 - \alpha_4)}(X - \alpha_2)(X - \alpha_3)(X - \alpha_4)$$

Le polynôme L_1 ainsi défini, on a :

$$L_1(\alpha_1) = 1\,; \qquad L_1(\alpha_2) = 0\,; \qquad L_1(\alpha_3) = 0\,; \qquad L_1(\alpha_1) = 0\,;$$

On construit de façon analogue les polynômes L_2, L_3 et L_4, qui vont prendre la valeur 1 en α_2, α_3 et α_4 respectivement, et qui vont s'annuler en les autres α_i.

Plutôt que de les définir un par un, on peut donner une formule générale :

$$\forall\, k \in [\![1, 4]\!],\; L_k = \prod_{i=1,\; i \neq k}^{4} \frac{(X - \alpha_i)}{(\alpha_k - \alpha_i)}$$

Ces polynômes construits, revenons à la preuve de la bijectivité de F. Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$.

On pose : $P = xL_1 + yL_2 + zL_3 + tL_4$. Le polynôme P est de degré au plus 3, en tant que combinaison linéaire de polynômes de degré 3 exactement.

En outre, par construction des polynômes L_i, on a :

$$P(\alpha_1) = x\,; \qquad P(\alpha_2) = y\,; \qquad P(\alpha_3) = z\,; \qquad P(\alpha_4) = t$$

Ce qui signifie déjà que $F(P) = (x, y, z, t)$ (et prouve donc la surjectivité de F).

En outre, ce polynôme P est unique (dans $\mathbb{R}_3[X]$) pour la même raison que dans l'exercice précédent. S'il existe un polynôme Q de $\mathbb{R}_3[X]$ tel que $F(Q) = (x, y, z, t)$, alors P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{R}_3[X]$ qui coïncident en 4 points : d'après le principe du prolongement algébrique, ils sont égaux.

En résumé : tout élément (x, y, z, t) de $\mathbb{R}^4$ admet un unique antécédent par F (le polynôme $xL_1 + yL_2 + zL_3 + tL_4$).

Conclusion. F est bijective.

Exercice 23. — Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ telle que : $A^2 - 5A + 6\mathrm{I}_n = 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{K})}$.

Etablir que pour tout entier naturel N, il existe deux scalaires a_N et b_N tels que : $A^N = a_N A + b_N \mathrm{I}_n$.

C'est une question classique (d'où ce nouvel exemple).

L'idée est de réaliser la division euclidienne de X^N par $X^2 - 5X + 6$.

On peut observer que $X^2 - 5X + 6 = (X-2)(X-3)$, et affirmer que d'après le théorème de la division euclidienne, il existe un polynôme Q et deux scalaires a et b tels que :

$$X^N = (X-2)(X-3)Q + aX + b$$

On en déduit : $2^N = 2a + b$ (par évaluation en 2) et $3^N = 3a + b$ (par évaluation en 3).

La résolution aisée de ce système conduit à : $a = 3^N - 2^N$ et $b = 2^N + 2^{N+1} - 2 \times 3^N$.

Ainsi : $X^N = \left(X^2 - 5X + 6\right) Q + \left(3^N - 2^N\right) X + 2^N + 2^{N+1} - 2 \times 3^N$.

On en déduit que :

$$A^N = \underbrace{\left(A^2 - 5A + 6\mathrm{I}_n\right)}_{=0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{K})}} Q(A) + \left(3^N - 2^N\right) A + \left(2^N + 2^{N+1} - 2 \times 3^N\right) \mathrm{I}_n$$

Conclusion. $\forall N \in \mathbb{N},\ A^N = \left(3^N - 2^N\right) A + \left(2^N + 2^{N+1} - 2 \times 3^N\right) \mathrm{I}_n$

Exercice 24. — Soit z un nombre complexe non réel.

Etablir que le polynôme $P = (X-z)(X-\overline{z})$ est à coefficients réels.

Indication : développer $(X-z)(X-\overline{z})$.

On a :

$$(X-z)(X-\overline{z}) = X^2 - (z+\overline{z})\, X + z\overline{z} \qquad \text{soit} \qquad (X-z)(X-\overline{z}) = X^2 - 2\mathrm{Re}\,(z)\, X + |z|^2$$

Puisque $\mathrm{Re}\,(z)$ et $|z|^2$ sont des nombres réels, le polynôme $(X-z)(X-\overline{z})$ est à coefficients réels (c'est un élément de $\mathbb{R}_2[X]$).

Remarque. Cette formule $(X-z)(X-\overline{z}) = X^2 - 2\mathrm{Re}\,(z)\, X + |z|^2$ est tellement utile en pratique qu'elle mérite d'être connue !

Exercice 25. — Factoriser le polynôme $P = X^3 - 1$, dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.

On sait que les racines de $X^3 - 1$ sont les racines cubiques de l'unité. Par suite :

$$X^3 - 1 = (X-1)(X-\mathrm{j})(X-\overline{\mathrm{j}}) \qquad \text{(factorisation dans } \mathbb{C}[X])$$

Pour obtenir la factorisation de $X^3 - 1$ dans $\mathbb{R}[X]$, on multiplie les parenthèses faisant intervenir des racines complexes conjuguées (et on utilise l'exo précédent) :

$$X^3 - 1 = (X-1)(X^2 + X + 1) \qquad \text{(factorisation dans } \mathbb{R}[X])$$

Exercice 26. — Factoriser le polynôme $P = X^6 - 1$, dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.

On sait que les racines de $X^6 - 1$ sont les racines sixièmes de l'unité. Par suite :

$$X^6 - 1 = (X-1)(X+1)(X-\mathrm{j})(X-\overline{\mathrm{j}})(X+\mathrm{j})(X+\overline{\mathrm{j}}) \qquad \text{(factorisation dans } \mathbb{C}[X])$$

Pour obtenir la factorisation de X^6-1 dans $\mathbb{R}[X]$, on multiplie deux à deux les parenthèses faisant intervenir des racines complexes conjuguées (et on utilise l'exo 1) :

$$X^6-1=(X-1)(X+1)(X^2+X+1)(X^2-X+1) \qquad \text{(factorisation dans } \mathbb{R}[X])$$

Exercice 27. — Soient n un entier naturel $\geqslant 2$ et α_0, α_1,... α_n $(n+1)$ réels, deux à deux distincts. Etablir que l'application :

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}_n[X] &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ P &\longmapsto (P(\alpha_0), P(\alpha_1), \ldots, P(\alpha_n)) \end{aligned}$$

est bijective.

L'application F est bijective si tout élément $(x_0, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ admet un unique antécédent par F.

En d'autres termes, montrer que F est bijective revient à montrer qu'il existe un unique polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que :

$$P(\alpha_0)=x_0\,; \qquad P(\alpha_1)=x_1\,;\ldots; \qquad P(\alpha_n)=x_n$$

La méthode pour établir ce résultat consiste donc à construire les polynômes interpolateurs de Lagrange L_0,..., L_n associés à α_0,..., α_n.

Explicitement :

$$L_0=\frac{1}{(\alpha_0-\alpha_1)\,(\alpha_0-\alpha_2)\ldots(\alpha_0-\alpha_n)}\,(X-\alpha_1)\,(X-\alpha_2)\ldots(X-\alpha_n)$$

Le polynôme L_0 ainsi défini, on a :

$$L_0(\alpha_0)=1\,; \qquad L_0(\alpha_1)=0\,; \qquad L_0(\alpha_n)=0$$

On construit de façon analogue les polynômes L_1, ..., L_n, qui vont prendre la valeur 1 en un α_i, et qui vont s'annuler en les autres α_j.

La formule générale permettant de les définir est :

$$\forall\, k \in [\![\, 0, n \,]\!],\ L_k=\prod_{i=0,\ i\neq k}^{n} \frac{(X-\alpha_i)}{(\alpha_k-\alpha_i)}$$

Ces polynômes construits, revenons à la preuve de la bijectivité de F. Soit $(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

On pose : $P=\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x_k L_k$. Le polynôme P est de degré au plus n, en tant que combinaison linéaire de polynômes de degré n exactement.

En outre, par construction des polynômes L_k, on a :

$$P(\alpha_0)=x_0\,; \qquad P(\alpha_1)=x_1\,;\ldots; \qquad P(\alpha_n)=x_n$$

Ce qui signifie déjà que $F(P) = (x_0, \dots, x_n)$ (et prouve donc la surjectivité de F).

En outre, ce polynôme P est unique (dans $\mathbb{R}_n[X]$) pour la même raison que dans l'exercice 3 d'hier. S'il existe un polynôme Q de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $F(Q) = (x_0, \dots, x_n)$, alors P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ qui coïncident en $(n+1)$ points : d'après le principe du prolongement algébrique, ils sont égaux.

En résumé : tout élément $(x_0, \dots, x_n)$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ admet un unique antécédent par F (le polynôme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x_k L_k$).

Conclusion. F est bijective.

Exercice 28. — Factoriser le polynôme $P = X^4 + 1$, dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.

On commence par déterminer les racines de $X^4 + 1$, en résolvant l'équation :

$$z^4 + 1 = 0 \iff z^4 = -1 \iff z^4 = \left(e^{i\pi/4}\right)^4 \iff \exists\, k \in [\![0, 3]\!],\ z = i^k e^{i\pi/4}$$

Par suite le polynôme $X^4 + 1$ possède quatre racines complexes : $e^{i\pi/4}$, $ie^{i\pi/4}$, $-e^{i\pi/4}$ et $-ie^{i\pi/4}$.

Ainsi :

$$X^4 + 1 = \left(X - e^{i\pi/4}\right)\left(X - ie^{i\pi/4}\right)\left(X + e^{i\pi/4}\right)\left(X + ie^{i\pi/4}\right) \qquad \text{(factorisation dans } \mathbb{C}[X])$$

Pour obtenir la factorisation de $X^4 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$, on multiplie deux à deux les parenthèses faisant intervenir des racines complexes conjuguées :

$$X^4 + 1 = (X^2 - \sqrt{2}X + 1)(X^2 + \sqrt{2}X + 1) \qquad \text{(factorisation dans } \mathbb{R}[X])$$

Exercice 29. — Factoriser le polynôme $P = X^4 - X^2 + 2X - 1$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Observons que : $P = X^4 - (X^2 - 2X + 1) = X^4 - (X-1)^2 = (X^2 - X + 1)(X^2 + X - 1)$.

Les deux polynômes du second degré se factorisent aisément :

$$X^2 - X + 1 = (X + j)\left(X + \bar{j}\right) \text{ et } X^2 + X - 1 = (X - \alpha)(X - \beta) \text{ avec } \alpha = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \text{ et } \beta = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$$

Par suite :

$$X^4 - X^2 + 2X - 1 = (X + j)\left(X + \bar{j}\right)(X - \alpha)(X - \beta) \qquad \text{(factorisation dans } \mathbb{C}[X])$$

Pour obtenir la factorisation de $X^4 - X^2 + 2X - 1$ dans $\mathbb{R}[X]$, on multiplie les deux parenthèses faisant intervenir des racines complexes conjuguées :

$$X^4 - X^2 + 2X - 1 = (X^2 - X + 1)(X - \alpha)(X - \beta) \qquad \text{(factorisation dans } \mathbb{R}[X])$$

Exercice 30. — Démontrer la **formule de Taylor pour les polynômes** : pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré n, on a

$$P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k$$

Cf pdf.

Exercice 31. — Le but de cet exercice est de mettre en exergue une propriété des polynômes de Lagrange.

On considère les 3 réels : $\alpha_0 = -1$, $\alpha_1 = 1$ et $\alpha_2 = 2$.

On définit L_0, L_1 et L_2 comme les 3 polynômes de Lagrange associés aux réels -1, 1 et 2.

1/ Par définition, L_0, L_1 et L_2 appartiennent à $\mathbb{R}_n[X]$; pour quelle valeur de n ?[3]

D'après le cours, les polynômes de Lagrange $L_0, \ldots, L_n$ associés à $(n+1)$ scalaires $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ deux à deux distincts sont tous exactement de degré n.

2/ Déterminer les expressions des polynômes de Lagrange L_0, L_1 et L_2 associés aux trois réels -1, 1 et 2.

On a : $L_0 = \dfrac{1}{6}(X-1)(X-2) = \dfrac{1}{6}X^2 - \dfrac{1}{2}X + \dfrac{1}{3}$

Et : $L_1 = -\dfrac{1}{2}(X+1)(X-2) = -\dfrac{1}{2}X^2 + \dfrac{1}{2}X + 1$

Enfin : $L_2 = \dfrac{1}{3}(X+1)(X-1) = \dfrac{1}{3}X^2 - \dfrac{1}{3}$

3/ **Trois exemples pour commencer à comprendre**.

a/ On pose $Q = L_0 + L_1 + L_2$. Calculer explicitement le polynôme Q (c'est-à-dire déterminer explicitement ses coefficients).

D'après la question précédente :

$$Q = \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)X^2 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)X + \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} \Longleftrightarrow Q = 1$$

b/ On pose $R = -L_0 + L_1 + 2L_2$. Calculer explicitement le polynôme R.

D'après la question précédente :

$$R = \left(-\frac{1}{6} - \frac{1}{2} + \frac{2}{3}\right)X^2 + \left(+\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)X - \frac{1}{3} + 1 - \frac{2}{3} \Longleftrightarrow R = X$$

c/ On pose $S = L_0 + L_1 + 4L_2$. Calculer explicitement le polynôme S.

D'après la question précédente :

$$S = \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2} + \frac{4}{3}\right)X^2 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)X + \frac{1}{3} + 1 - \frac{4}{3} \Longleftrightarrow S = X^2$$

4/ **Généralisation**.

a/ Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. On pose $P_1 = P(-1)L_0 + P(1)L_1 + P(2)L_2$. A la lumière des exemples ci-dessus, que peut-on dire des polynômes P et P_1 ?

D'après les exemples précédents, on peut conjecturer que : $P_1 = P$.

---

3. Sous-entendu : quelle est la **plus petite valeur** de n qui convient.

b/ Justifier la réponse à la question précédente.

Par définition : $P_1 = P(-1)L_0 + P(1)L_1 + P(2)L_2$. Puisque L_0, L_1 et L_2 sont tous les trois de degré 2, P_1 est de degré au plus 2. Ainsi : $P_1 \in \mathbb{R}_2[X]$.

Par ailleurs : $P_1(-1) = P(-1)L_0(-1) + P(1)L_1(-1) + P(2)L_2(-1)$.

Or par construction des polynômes de Lagrange, on a :

$$L_0(-1) = 1\,; \qquad L_1(-1) = 0\,; \qquad L_2(-1) = 0$$

On en déduit que : $P_1(-1) = P(-1)$.

Par un raisonnement analogue : $P_1(1) = P(1)$ et $P_1(2) = P(2)$.

En résumé :

$$P \in \mathbb{R}_2[X], \quad P_1 \in \mathbb{R}_2[X] \quad \text{et} \left\{ \begin{array}{l} P_1(-1) = P(-1) \\ P_1(1) = P(1) \\ P_1(2) = P(2) \end{array} \right.$$

D'après le principe du prolongement algébrique : $P = P_1$.[4]

Exercice 32. — On pose $P = X^4 - 2X^2 + 3X + 5 \in \mathbb{R}_4[X]$.

On considère par ailleurs les 5 polynômes de Lagrange L_0, L_1, L_2, L_3 et L_4 associés aux réels 0, 1, 2, 3 et 4.

Les deux questions sont indépendantes.

1/ Exprimer P en fonction de L_0, L_1, L_2, L_3 et L_4.

C'est l'exercice 1, avec 5 valeurs (et 5 polynômes) au lieu de 3. Par les mêmes arguments que dans la question 4-b de l'exo précédent, on a :

$$P = P(0)L_0 + P(1)L_1 + P(2)L_2 + P(3)L_3 + P(4)L_4$$

2/ Exprimer P en fonction de 1, $(X+1)$, $(X+1)^2$, $(X+1)^3$ et $(X+1)^4$.

D'après la formule de Taylor (en α, avec $\alpha = -1$) dans $\mathbb{R}_4[X]$:

$$P = \sum_{k=0}^{4} \frac{P^{(k)}(-1)}{k!}\,(X+1)^k$$

soit :

$$P = P(-1) + P'(-1)(X+1) + \frac{P''(-1)}{2}\,(X+1)^2 + \frac{P^{(3)}(-1)}{6}\,(X+1)^3 + \frac{P^{(4)}(-1)}{24}\,(X+1)^4$$

Or : $P(-1) = 1\,;\quad P'(-1) = 3\,;\quad P''(-1) = 8\,;\quad P^{(3)}(-1) = -24\,;\quad P^{(4)}(-1) = 24$

Ainsi :

$$P = 1 + 3(X+1) + 4\,(X+1)^2 - 4\,(X+1)^3 + (X+1)^4$$

4. Puisqu'il s'agit de deux polynômes de degré au plus **2**, qui coïncident en **3** valeurs.

Exercice 33. — Soit $n \in N^*$. On considère $(n+1)$ scalaires $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ deux à deux distincts, et $L_0, \ldots, L_n$ les $(n+1)$ polynômes de Lagrange (de $\mathbb{K}_n[X]$) associés à $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$.

Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$.

Les deux questions sont indépendantes.

1/ On pose : $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(\alpha_k) L_k$. Montrer que $P = Q$.

Par construction, les polynômes de Lagrange $L_0, \ldots, L_n$ sont tous exactement de degré n. Il s'ensuit que Q est au plus de degré n, càd : $Q \in \mathbb{K}_n[X]$.

Soit $i \in [\![0, n]\!]$. On a :

$$Q(\alpha_i) = \sum_{k=0}^{n} P(\alpha_k) L_k(\alpha_i)$$

Or, de nouveau par construction des polynômes de Lagrange :

$$L_k(\alpha_i) = \delta_{ik}, \text{ càd : } L_i(\alpha_i) = 1 \text{ et } L_k(\alpha_i) = 0 \text{ si } k \neq i$$

Il s'ensuit que : $Q(\alpha_i) = P(\alpha_i)$.

L'entier i étant un entier arbitraire de $i \in [\![0, n]\!]$, on a établi que :

$$\forall\, i \in [\![0, n]\!], \quad Q(\alpha_i) = P(\alpha_i)$$

En résumé :

$$P \in \mathbb{K}_n[X], \quad Q \in \mathbb{K}_n[X] \quad \text{et } \forall\, i \in [\![0, n]\!], \quad Q(\alpha_i) = P(\alpha_i)$$

D'après le principe du prolongement algébrique : $P = Q$.[5]

2/ Exprimer P en fonction de 1, $(X+1), \ldots, (X+1)^n$.

D'après la formule de Taylor dans $\mathbb{K}_n[X]$ appliquée en $\alpha = -1$, on a :

$$P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(-1)}{k!} \, (X+1)^k$$

Plus explicitement mais moins rigoureusement :

$$P = P(-1) + P'(-1)(X+1) + \frac{P''(-1)}{2!} \, (X+1)^2 + \cdots + \frac{P^{(n)}(-1)}{n!} \, (X+1)^n$$

5. Puisqu'il s'agit de deux polynômes de degré au plus **n**, qui coïncident en **n+1** valeurs.

Exercice 34. — Etablir que 1 est racine de multiplicité 4 (oups !) de $P = X^5 - X^4 - 6X^3 + 14X^2 - 11X + 3$.

On vérifie aisément que $P(1) = 0$.

De plus : $P' = 5X^4 - 4X^3 - 18X^2 + 28X - 11$. D'où : $P'(1) = 0$.

De plus : $P'' = 20X^3 - 12X^2 - 36X + 28$. D'où : $P''(1) = 0$.

Puisque $P(1) = P'(1) = P''(1) = 0$, on en déduit que 1 est racine de multiplicité au moins 3 de P. Par suite : $(X-1)^3$ divise P.

Mais en fait : $P^{(3)} = 60X^2 - 24X - 36$. Donc $P^{(3)}(1) = 0$.

En revanche : $P^{(4)} = 120X - 24$. Donc $P^{(4)}(1) = 96 \neq 0$.

Conclusion. $P(1) = P'(1) = P''(1) = P^{(3)}(1) = 0$ et $P^{(4)}(1) \neq 0$. On en déduit que 1 est racine de multiplicité 4 de P.

Ce qui signifie que $(X-1)^4$ divise P, et que $(X-1)^5$ ne divise pas P.

Exercice 35. — Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer a et b pour que $P = aX^{n+1} + bX^n + 1$ soit divisible par $(X-1)^2$.

D'après le cours (définition de multiplicité) :

$$[\ P = aX^{n+1} + bX^n + 1 \text{ est divisible par } (X-1)^2\ ] \Longleftrightarrow [1 \text{ est racine de } P \text{ de multiplicité au moins } 2]$$

D'où, encore d'après le cours (théorème faisant le lien entre la multiplicité et l'annulation des 1ères dérivées) :

$$[\ P = aX^{n+1} + bX^n + 1 \text{ est divisible par } (X-1)^2\ ] \Longleftrightarrow [P(1) = P'(1) = 0]$$

Or : $P(1) = a + b + 1$ et $P'(1) = (n+1)a + nb$. Par suite :

$$[P(1) = P'(1) = 0] \Longleftrightarrow \begin{cases} a + b = -1 \\ (n+1)a + nb = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a = n \\ b = -(n+1) \end{cases}$$

Conclusion. Le polynôme $P = aX^{n+1} + bX^n + 1$ est divisible par $(X-1)^2$ si et seulement si $a = n$ et $b = -(n+1)$.

Exercice 36. — Soit $n \in N$, $n \geqslant 3$. Montrer que le polynôme $P = X^{2n} - nX^{n+1} + nX^{n-1} - 1$ est divisible par $(X-1)^3$, mais n'est pas divisible par $(X-1)^4$.

D'après le cours (définition de multiplicité), $P = X^{2n} - nX^{n+1} + nX^{n-1} - 1$ est divisible par $(X-1)^3$, mais n'est pas divisible par $(X-1)^4$ si et seulement si 1 est racine de multiplicité 3 de P.

D'après le cours (théorème...), 1 est racine de multiplicité 3 de P si et seulement si :

$$P(1) = P'(1) = P''(1) = 0 \text{ et } P^{(3)}(1) \neq 0$$

On vérifie aisément que $P(1) = 0$.

De plus : $P' = 2nX^{2n-1} - n(n+1)X^n + n(n-1)X^{n-2}$. D'où : $P'(1) = 2n - n^2 - n + n^2 - n = 0$.

De plus : $P'' = 2n(2n-1)X^{2n-2} - n^2(n+1)X^{n-1} + n(n-1)(n-2)X^{n-3}$.

D'où : $P''(1) = 4n^2 - 2n - n^3 - n^2 + n^3 - 3n^2 + 2n = 0$.

De plus : $P'' = 2n(2n-1)X^{2n-2} - n^2(n+1)X^{n-1} + n(n-1)(n-2)X^{n-3}$.

D'où : $P''(1) = 4n^2 - 2n - n^3 - n^2 + n^3 - 3n^2 + 2n = 0$.

Enfin : $P^{(3)} = 2n(2n-1)(2n-2)X^{2n-3} - n^2(n+1)(n-1)X^{n-2} + n(n-1)(n-2)(n-3)X^{n-4}$.

Donc : $P^{(3)}(1) = 4n^3 - 6n^2 + 2n - n^4 + n^2 + n^4 - 6n^3 + 11n^2 - 6n = -2n^3 + 5n^2 - 4n \neq 0$.

Conclusion. $P(1) = P'(1) = P''(1) = 0$ et $P^{(3)}(1) \neq 0$. On en déduit que 1 est racine de multiplicité 3 de P. Ce qui signifie que $(X-1)^3$ divise P, et que $(X-1)^4$ ne divise pas P.

EXERCICE 37. — Déterminer la valeur de m pour que 1 soit racine double [6] du polynôme $P_m = X^3 - 3X + m$.

1 est racine double de $P_m = X^3 - 3X + m$ SSI $P_m(1) = P'_m(1) = 0$ et $P''_m(1) \neq 0$.

Or : $P_m(1) = -2 + m$, $P'_m(1) = 0$ et $P''_m(1) = 6$.

Il s'ensuit que : 1 est racine double de $P_m = X^3 - 3X + m$ SSI $m = 2$.

Remarque. Lorsque $m = 2$, on a : $P_m = X^3 - 3X + 2 = (X-1)^2(X+2)$.

EXERCICE 38. — Déterminer les racines (dans $\mathbb{C}$) du polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} \left[\binom{n}{k} 3^k (1-X)^{3n-2k} X^k \right]$ ainsi que leurs multiplicités.

On commence par observer judicieusement que : $3n - 2k = n + 2(n-k)$.

Par suite : $(1-X)^{3n-2k} = (1-X)^n \left[(1-X)^2\right]^{n-k}$.

En exploitant cette remarque : $P = (1-X)^n \sum_{k=0}^{n} \left[\binom{n}{k} (3X)^k \left((1-X)^2\right)^{n-k} \right]$

Donc : $P = (1-X)^n \left(3X + (1-X)^2\right)^n$

D'où : $P = (1-X)^n \left(X^2 + X + 1\right)^n$

Finalement : $P = (1-X)^n (X - \mathrm{j})^n \left(X - \bar{\mathrm{j}}\right)^n$.

Conclusion. P admet exactement 3 racines dans $\mathbb{C}$, qui sont les racines cubiques de l'unité (1, j et $\bar{\mathrm{j}}$) : toutes trois sont de multiplicité n.

EXERCICE 39. — Etablir que le polynôme $X^2 - 4X + 3$ n'est pas irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.

On a : $X^2 - 4X + 3 = (X-1)(X-3)$. Donc $X^2 - 4X + 3$ admet un diviseur ($(X-1)$ par exemple) dans $\mathbb{R}[X]$.
Conclusion. $X^2 - 4X + 3$ n'est pas irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.

6. Càd de multiplicité exactement 2.

Exercice 40. — Etablir que le polynôme $X^2 - 3X + 4$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.

Il est immédiat que le polynôme $P = X^2 - 3X + 4$ n'admet pas de racines réelles (♠).[7]

Pour montrer qu'il est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$, il suffit de prouver que tout diviseur de P dans $\mathbb{R}[X]$ est associé à 1 (càd est un polynôme constant non nul), ou est associé à P.

Soit donc Q un diviseur dans $\mathbb{R}[X]$. Alors il existe un polynôme R dans $\mathbb{R}[X]$ tel que : $P = QR$.

En comparant les degrés des polynômes dans cette équation, on obtient : $2 = \deg Q + \deg R$.

Puisque $\deg Q$ et $\deg R$ sont nécessairement des entiers naturels, on en déduit que : $\deg Q = 2$ et $\deg R = 0$, ou $\deg Q = 0$ et $\deg R = 2$, ou $\deg Q = \deg R = 1$.

➤ **1er cas** — $\deg Q = 2$ **et** $\deg R = 0$.

Dans ce cas : $\exists\, \lambda \in \mathbb{R}^*,\ R = \lambda$. On en déduit que : $Q = \dfrac{1}{\lambda} P$. Donc Q est associé à P.

➤ **2ème cas** — $\deg Q = 0$ **et** $\deg R = 2$.

Dans ce cas : $\exists\, \lambda \in \mathbb{R}^*,\ Q = \lambda$ (et donc : $R = \dfrac{1}{\lambda} P$). D'où Q est associé à 1.

➤ **3ème cas** — $\deg Q = \deg R = 1$.

Dans ce cas : $\exists\,(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ avec a et c non nuls, tels que $Q = aX + b$ et $R = cX + d$. Or Q admet une racine réelle $(-b/a)$, donc P admet également une racine réelle. Ce qui contredit (♠). Ce dernier cas est donc exclus.

➤ **Synthèse**.

D'après ce qui précède, si Q est un diviseur de P dans $\mathbb{R}[X]$, alors Q est associé à P ou associé à 1.

Conclusion. Le polynôme $X^2 - 3X + 4$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.

Remarque. Le polynôme $X^2 - 3X + 4$ n'est pas irréductible dans $\mathbb{C}[X]$, puisque dans $\mathbb{C}[X]$, on peut écrire :

$$X^2 - 3X + 4 = (X - z)\,(X - \overline{z}) \qquad \text{avec} \quad z = \frac{3 + \mathrm{i}\sqrt{7}}{2}.$$

Exercice 41. — Décomposer en irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants[8] :

$$P_1(X) = X^4 - 16 \qquad P_2(X) = X^3 - 8 \qquad P_3(X) = X^3 + X^2 + X + 1$$

1/ On peut commencer par chercher les racines de P_1. Pour tout complexe z, on a :

$$P_1(z) = 0 \iff z^4 - 16 = 0 \iff z^4 = 16 \iff \exists\, k \in [\![\, 0, 3 \,]\!],\ z = 2\mathrm{i}^k$$

En d'autres termes, les racines de P_1 sont ± 2 et $\pm 2\mathrm{i}$.

On en déduit la décomposition en irréductibles de P_1 dans $\mathbb{C}[X]$:

$$P_1 = (X - 2)\,(X + 2)\,(X - 2\mathrm{i})\,(X + 2\mathrm{i})$$

Puis, en "multipliant les parenthèses" faisant intervenir des racines conjuguées, la décomposition en irréductibles de P_1 dans $\mathbb{R}[X]$:

$$P_1 = (X - 2)\,(X + 2)\,(X^2 + 4)$$

7. Son discriminant étant strictement négatif.

8. Dans $\mathbb{C}[X]$, les polynômes irréductibles sont exactement ceux de degré 1. Dans $\mathbb{R}[X]$, les polynômes irréductibles sont exactement ceux de degré 1, et ceux de degré 2 sans racine réelle ("avec un $\Delta < 0$").

➤ 2/ $P_2(X) = X^3 - 8$. On peut commencer par chercher les racines de P_2. Pour tout complexe z, on a :

$$P_2(z) = 0 \Longleftrightarrow z^3 - 8 = 0 \Longleftrightarrow z^8 = 8 \Longleftrightarrow \exists\, k \in [\![\, 0, 2 \,]\!],\ z = 2\mathrm{j}^k$$

En d'autres termes, les racines de P_2 sont 2, $2\mathrm{j}$ et $2\bar{\mathrm{j}}$.

On en déduit la décomposition en irréductibles de P_2 dans $\mathbb{C}[X]$:

$$P_2 = (X-2)(X-2\mathrm{j})\left(X-2\bar{\mathrm{j}}\right)$$

Puis, en "multipliant les parenthèses" faisant intervenir des racines conjuguées, la décomposition en irréductibles de P_2 dans $\mathbb{R}[X]$:

$$P_2 = (X-2)\left(X^2+2X+4\right)$$

➤ 3/ $P_3(X) = X^3 + X^2 + X + 1$. D'après le cours (sur les complexes), les racines de P_3 sont les racines quatrièmes de l'unité, sauf 1.
On en déduit la décomposition en irréductibles de P_3 dans $\mathbb{C}[X]$:

$$P_3 = (X+1)(X-\mathrm{i})\left(X+\bar{\mathrm{i}}\right)$$

Puis, en "multipliant les parenthèses" faisant intervenir des racines conjuguées, la décomposition en irréductibles de P_3 dans $\mathbb{R}[X]$:

$$P_3 = (X+1)\left(X^2+1\right)$$

Exercice 42. — Dans $\mathbb{R}_6[X]$, on considère l'ensemble E des polynômes P admettant 1 comme racine de multiplicité au moins 3.

1/ Par définition, que signifie l'assertion "P admet 1 comme racine de multiplicité au moins 3".

D'après le cours, P admet 1 comme racine de multiplicité au moins 3 si $(X-1)^3$ divise P.

2/ Montrer qu'il existe quatre polynômes P_1, P_2, P_3 et P_4 à coefficients réels tel que :

$$\forall\, P \in E,\ \exists\, (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \in \mathbb{R}^4,\ P = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3 + \alpha_4 P_4.$$

Soit $P \in \mathbb{R}_6[X]$. On a :

$$\begin{aligned} P \in E &\Longleftrightarrow \exists\, Q \in \mathbb{R}_3[X],\ P = (X-1)^3 Q \\ &\Longleftrightarrow \exists\, (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \in \mathbb{R}^4,\ P = (X-1)^3\left(\alpha_1 X^3 + \alpha_2 X^2 + \alpha_3 X + \alpha_4\right) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$P \in E \Longleftrightarrow \exists\, (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \in \mathbb{R}^4,\ P = \alpha_1 \underbrace{X^3(X-1)^3}_{P_1} + \alpha_2 \underbrace{X^2(X-1)^3}_{P_2} + \alpha_3 \underbrace{X(X-1)^3}_{P_3} + \alpha_4 \underbrace{(X-1)^3}_{P4}$$

D'où la conclusion.

Exercice 43. — (*) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, et soit $a \in \mathbb{R}$. On suppose que $P(a) > 0$ et : $\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \quad P(k)(a) \geqslant 0$. Etablir que : $\forall\, x \geqslant a, \quad P(x) > 0$.

Le polynôme P étant non nul par hypothèse, on peut poser $n = \deg P \in \mathbb{N}$.

D'après la formule de Taylor dans $\mathbb{R}[X]$: $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$.

D'où, pour tout réel x : $P(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$

Ainsi : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ P(x) = P(a) + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$.

En particulier, pour tout réel $x \geqslant a$ on a :

$$P(x) = \underbrace{P(a)}_{>0} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \underbrace{\frac{P^{(k)}(a)}{k!}}_{\geqslant 0} \underbrace{(x-a)^k}_{\geqslant 0}}_{\geqslant 0}$$

Conclusion. $\forall\, x \in \mathbb{R},\ [x \geqslant a] \Longrightarrow [P(x) > 0]$

Exercice 44. — On considère l'application f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$.

1/ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la dérivée n-ième de f est $f^{(n)} : x \in \mathbb{R} \longmapsto P_n(x)\mathrm{e}^{-x^2}$, avec P_n polynôme à coefficients réels. Calculer P_0, P_1 et P_2.

D'après les théorèmes généraux, la fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x on a : $f'(x) = -2x\mathrm{e}^{-x^2}$.

Donc, pour tout réel x on a : $f''(x) = (4x^2 - 2)\,\mathrm{e}^{-x^2}$.

Conclusion : $P_0 = 1$, $P_1 = -2X$ et $P_2 = 4X^2 - 2$.

➤ Montrons par récurrence sur n l'existence de P_n. L'initialisation est fournie par ce qui précède.

Supposons que pour un certain entier naturel n, il existe un polynôme P_n à coefficients réels tel que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = P_n(x)\mathrm{e}^{-x^2}$$

Alors pour tout réel x on a : $f^{(n+1)}(x) = (P'_n(x) - 2xP_n(x))\,\mathrm{e}^{-x^2}$.

Donc, en posant $P_{n+1} = P'_n - 2XP_n$, on a : $P_{n+1} \in \mathbb{R}[X]$ et $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f^{(n+1)}(x) = P_{n+1}(x)\mathrm{e}^{-x^2}$

Ce qui prouve l'hérédité de la propriété. Récurrence établie.

2/ Préciser le degré et le coefficient dominant de P_n.

On prouve par récurrence sur $\mathbb{N}$ que [9] :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \deg(P_n) = n \quad \text{et} \quad \mathrm{cd}(P_n) = (-1)^n\, 2^n$$

9. La preuve est analogue à celle faite sur les polynômes de Tchebychev, dans Maths8.

3/ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $P_{n+1}(x) = 2xP_n(x) + 2nP_{n-1}(x) = 0$.

On pourra utiliser le fait que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -2xf(x)$.

Application de la formule de Leibniz.

Exercice 45. — **(Décomposition en irréductibles).**

Décomposer en polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes :

1/ $P = X^4 - X$

2/ $Q = X^6 + X^4 + X^2 + 1$

1/ On a : $P = X^4 - X = X\left(X^3 - 1\right)$.

On en déduit que la décomposition en irréductibles de P dans $\mathbb{C}[X]$ est : $\boxed{P = X(X-1)(X-\mathrm{j})\left(X-\bar{\mathrm{j}}\right)}$

Et dans $\mathbb{R}[X]$: $\boxed{P = X(X-1)\left(X^2+X+1\right)}$.

Déterminons les racines du polynôme Q.

On a : $Q(z) = 0 \Longleftrightarrow z^6 + z^4 + z^2 + 1 = 0 \Longleftrightarrow Z^3 + Z^2 + Z + 1 = 0$ en ayant posé $Z = z^2$. Les racines du polynôme $X^3 + X^2 + X + 1$ étant -1 et $\pm\mathrm{i}$, on en déduit que :

$$Q(z) = 0 \Longleftrightarrow \left[z^2 = -1 \vee z^2 = \mathrm{i} \vee z^2 = -\mathrm{i}\right] \Longleftrightarrow \left[z = \pm\mathrm{i} \vee z = \pm\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4} \vee z = \pm\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}\right]$$

La décomposition en irréductibles de Q dans $\mathbb{C}[X]$ est donc :

$$\boxed{X^6 + X^4 + X^2 + 1 = (X-\mathrm{i})(X+\mathrm{i})\left(X-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}\right)\left(X+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}\right)\left(X-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}\right)\left(X+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}\right)}$$

Par suite, la décomposition en irréductibles de Q dans $\mathbb{R}[X]$ est :

$$\boxed{X^6 + X^4 + X^2 + 1 = \left(X^2+1\right)\left(X^2 - \sqrt{2}X + 1\right)\left(X^2 + \sqrt{2}X + 1\right)}$$

Exercice 46. — **(Multiplicité, décomposition en irréductibles, $\mathbb{U}_3$).** On pose :

$$P = \left(X^4 - X\right)\left(X^2 + X + 1\right)$$

1/ Déterminer les racines dans $\mathbb{C}$, ainsi que les multiplicités, du polynôme P.

On a : $P = X(X^3-1)\left(X^2+X+1\right) = X(X-1)\left(X^2+X+1\right)^2$

D'où : $P = X(X-1)\left(X-\mathrm{j}\right)^2\left(X-\bar{\mathrm{j}}\right)^2$.

Conclusion. Les racines de P sont 0 (multiplicité 1), 1 (multiplicité 1), j (multiplicité 2) et $\bar{\mathrm{j}}$ (multiplicité 2).

2/ Déterminer la décomposition en irréductibles du polynôme P dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$.

D'après la question précédente, la décomposition en irréductibles du polynôme P dans $\mathbb{C}[X]$ est :

$$P = X(X-1)\left(X-\mathrm{j}\right)^2\left(X-\bar{\mathrm{j}}\right)^2$$

Et la décomposition en irréductibles du polynôme P dans $\mathbb{R}[X]$ est :

$$P = X(X-1)\left(X^2+X+1\right)^2$$

Exercice 47. — (Multiplicité, $\mathbb{U}_3$). On pose :

$$P_1 = \left(X^2+X+1\right)^3 (X-2)\left(X^2+1\right)\left(X^3-1\right); \qquad P_2 = \left(X^2+X+1\right)^2 \left(X^3-1\right)^2 \left(X^2+1\right)$$

Déterminer les racines dans $\mathbb{C}$, ainsi que les multiplicités, des polynômes P_1 et P_2.

➤ $P_1 = \left(X^2+X+1\right)^3 (X-2)\left(X^2+1\right)\left(X^3-1\right)$

D'où : $P_1 = (X-\mathrm{j})^3(X-\bar{\mathrm{j}})^3(X-2)(X-\mathrm{i})(X+\mathrm{i})(X-1)\,(X-\mathrm{j})\left(X-\bar{\mathrm{j}}\right)$

Finalement : $P_1 = (X-\mathrm{j})^4(X-\bar{\mathrm{j}})^4(X-2)(X-\mathrm{i})(X+\mathrm{i})(X-1)$

Conclusion. Les racines de P_1 sont 1, 2, i et $-$i (de multiplicité 1), j et $\bar{\mathrm{j}}$ (de multiplicité 4).

➤ $P_2 = \left(X^2+X+1\right)^2 \left(X^3-1\right)^2 \left(X^2+1\right)$

D'où : $P_2 = (X-\mathrm{j})^2(X-\bar{\mathrm{j}})^2(X-1)^2\,(X-\mathrm{j})^2\left(X-\bar{\mathrm{j}}\right)^2(X-\mathrm{i})(X+\mathrm{i})$

Finalement : $P_2 = (X-\mathrm{j})^4(X-\bar{\mathrm{j}})^4(X-1)^2(X-\mathrm{i})(X+\mathrm{i})$

Conclusion. Les racines de P_2 sont i et $-$i (de multiplicité 1), 1 (de multiplicité 2), j et $\bar{\mathrm{j}}$ (de multiplicité 4).

Exercice 48. — (Un exo pas trop complexe). Soit P un polynôme non nul de $\mathbb{R}[X]$.

On suppose que i et j sont racines de P.

Etablir que P n'est pas irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.

Puisque i et j sont racines de P, et que P est à coefficients réels, $\bar{\mathrm{i}} = -\mathrm{i}$ et $\bar{\mathrm{j}}$ sont également racines de P.

Il s'ensuit que P est divisible dans $\mathbb{R}[X]$ par : $(X-\mathrm{i})\,(X+\mathrm{i})(X-\mathrm{j})(X-\bar{\mathrm{j}}) = (X^2+1)(X^2+X+1)$.

En outre, P étant non nul par hypothèse, on peut affirmer que :

$$\exists\, Q \in \mathbb{R}[X]\backslash\left\{\widetilde{0}\right\}, \quad P = (X^2+1)(X^2+X+1)Q$$

Ce qui implique que : $\deg(P) \geqslant 4$.

Conclusion. P n'est pas irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ (ni a fortiori dans $\mathbb{C}[X]$) puisque les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1, et les polynômes de degré 2 sans racine réelle.

Exercice 49. — (Utilisation des racines 5-èmes de l'unité). On pose :

$$P = \sum_{k=0}^{4} X^k \qquad \text{càd} \qquad P = X^4+X^3+X^2+X+1$$

Déterminer la décomposition en irréductibles du polynôme P dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$.

D'après le cours sur les complexes :

$$P = \prod_{\omega \in\, \mathbb{U}_5\backslash\{1\}} (X-\omega) = \prod_{k=1}^{4}\left(X - \mathrm{e}^{2\mathrm{i}k\pi/5}\right)$$

On en déduit la décomposition en irréductibles de P dans $\mathbb{C}[X]$:

$$P = \left(X-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/5}\right)\left(X-\mathrm{e}^{4\mathrm{i}\pi/5}\right)\left(X-\mathrm{e}^{6\mathrm{i}\pi/5}\right)\left(X-\mathrm{e}^{8\mathrm{i}\pi/5}\right)$$

On peut d'ailleurs réécrire cette égalité :

$$P = \left(X - \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/5}\right)\left(X - \mathrm{e}^{4\mathrm{i}\pi/5}\right)\left(X - \overline{\mathrm{e}^{4\mathrm{i}\pi/5}}\right)\left(X - \overline{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/5}}\right)$$

Il s'ensuit que la décomposition en irréductibles de P dans $\mathbb{R}[X]$ est :

$$P = \left(X^2 - 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)X + 1\right)\left(X^2 - 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)X + 1\right) \qquad (\spadesuit)$$

Si on veut aller plus loin, on peut retrouver la valeur exacte de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

On rappelle que la somme des racines 5-èmes de l'unité est nulle : $\displaystyle\sum_{\omega\in\mathbb{U}_5} \omega = 0$.

Explicitement : $\displaystyle\sum_{k=0}^{4} \mathrm{e}^{2\mathrm{i}k\pi/5} = 0$. En particulier : $\displaystyle\mathrm{Re}(\sum_{k=0}^{4} \mathrm{e}^{2\mathrm{i}k\pi/5}) = 0$.

D'où : $\displaystyle\sum_{k=0}^{4} \cos\left(\frac{2k\pi}{5}\right) = 0$. D'où : $1 + \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{5}\right) = 0$

On peut alors observer que : $\cos\left(\frac{8\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{6\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.[10]

Ainsi : $1 + 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = 0$.

Or, d'après la formule de duplication, on a : $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = 2\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) - 1$.

On a donc : $4\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) - 1 = 0$.

On en déduit que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est solution de l'équation du second degré $4X^2 + 2X - 1 = 0$, qui possède exactement deux solutions réelles : $X_{+,-} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$.

Il reste à observer que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est positif (puisque $2\pi/5$ est compris entre 0 et $\pi/2$) pour conclure que : $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$ $(\clubsuit)$

D'après $(\spadesuit)$ et $(\clubsuit)$, la décomposition en irréductibles de P dans $\mathbb{R}[X]$ est :

$$P = \left(X^2 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}X + 1\right)\left(X^2 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}X + 1\right)$$

10. Par une double application de la formule : $\cos(2\pi - \theta) = \cos(\theta)$.

Exercice 50. — (A propos des polynômes de Tchebychev).

On définit une suite de polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant

$$T_0 = 1, \qquad T_1 = X, \qquad \text{et} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N},\ T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$$

Ces polynômes sont appelés *polynômes de Tchebychev de première espèce.*

1/ Expliciter T_2 et T_3.

D'après l'énoncé : $T_2 = 2XT_1 - T_0 \Longleftrightarrow \boxed{T_2 = 2X^2 - 1}$.

Puis : $T_3 = 2XT_2 - T_1 \Longleftrightarrow \boxed{T_3 = 4X^3 - 3X}$.

2/ Pour tout entier naturel n, déterminer le degré de T_n et son coefficient dominant.

D'après la question précédente, on peut conjecturer que $\deg(T_n) = n$ et $\mathrm{cd}(T_n) = 2^{n-1}$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

Ces deux assertions se prouvent par récurrence **double** sur n. Observez qu'une seule récurrence suffit pour établir simultanément les deux propriétés.

Montrons que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \deg(T_n) = n$ et $\mathrm{cd}(T_n) = 2^{n-1}$ par récurrence double sur n. Notons :

$$\mathscr{P}(n) : \text{“}\deg(T_n) = n \text{ et } \mathrm{cd}(T_n) = 2^{n-1}\text{”}$$

➤ Initialisation (pour $n = 1$ et $n = 2$) : on a $T_1 = X$ et $T_2 = 2X^2 - 1$. On observe que $\deg(T_1) = 1$ et $\deg(T_2) = 2$; et $\mathrm{cd}(T_1) = 2^0$ et $\mathrm{cd}(T_2) = 2^1$. Donc les propriétés $\mathscr{P}(1)$ et $\mathscr{P}(2)$ sont vraies.

➤ Hérédité : supposons la propriété vraie aux rangs n et $n+1$ pour un certain entier naturel non nul n. On exploite alors la relation $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$.

Dans le terme de droite de cette égalité, le degré de $2XT_{n+1}$ est par hypothèse de récurrence, égal à $1 + (n+1) = n+2$; tandis que celui de T_n est égal à n (toujours par hypothèse de récurrence).
Puisque $\deg(2XT_{n+1}) > \deg(T_n)$, on en déduit d'une part que $\deg(2XT_{n+1} - T_n) = \deg(2XT_{n+1}) = n+2$, et d'autre part que : $\mathrm{cd}(2XT_{n+1} - T_n) = \mathrm{cd}(2XT_{n+1}) = 2\mathrm{cd}(T_{n+1})$.

Or, par hypothèse de récurrence, $\mathrm{cd}(T_{n+1}) = 2^n$, donc : $\mathrm{cd}(2XT_{n+1}) = 2^{n+1}$.

En résumé, on a établi que : $\deg(T_{n+2}) = n+2$ et $\mathrm{cd}(T_{n+2}) = 2^{n+1}$, ce qui signifie que la propriété $\mathscr{P}(n+2)$ est vraie, et prouve l'hérédité.

$\boxed{\text{Conclusion} : \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \deg(T_n) = n \text{ et } \mathrm{cd}(T_n) = 2^{n-1}}$

3/ Etablir que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, \theta \in \mathbb{R},\ T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$

Par récurrence (double encore une fois) sur n.

Notons $\mathrm{P}(n)$: “$\forall\, \theta \in \mathbb{R},\ T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$” pour tout entier naturel n.

➤ Initialisation (pour $n = 0$ et $n = 1$) : d'une part $T_0 = 1$ d'où pour tout réel θ on a : $T_0(\cos(\theta)) = 1$. D'autre part, pour tout réel θ on a : $\cos(0 \times \theta) = 1$. Donc $P(0)$ est vraie.

D'une part $T_1 = X$ d'où pour tout réel θ on a : $T_1(\cos(\theta)) = \cos(\theta)$. D'autre part, pour tout réel θ on a : $\cos(1 \times \theta) = \cos(\theta)$. Donc $P(1)$ est vraie.

➤ Hérédité : supposons la propriété vraie aux rangs n et $n+1$ pour un certain entier naturel n. Alors, pour tout réel θ on a :

$$T_{n+2}(\cos(\theta)) = 2\cos(\theta)\underbrace{T_{n+1}(\cos(\theta))}_{=_{HR}\cos((n+1)\theta)} - \underbrace{T_n(\cos(\theta))}_{=_{HR}\cos(n\theta)} = 2\cos(\theta)\cos((n+1)\theta) - \cos(n\theta)$$

$$= \cos((n+2)\theta) + \cos(n\theta) - \cos(n\theta) \text{ d'où : } T_{n+2}(\cos(\theta)) = \cos((n+2)\theta)$$

Ce qui assure que la propriété $P(n+2)$ est vraie, et prouve l'hérédité de la propriété.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \theta \in \mathbb{R},\ T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$

4/ Soit à présent n un entier naturel non nul. Montrer que T_n admet n racines deux à deux distinctes dans l'intervalle $[-1, 1]$.

Soit n un entier naturel non nul. On cherche les racines de T_n appartenant à l'intervalle $[-1, 1]$.

Considérons donc x un réel de cet intervalle tel que : $T_n(x) = 0$. Puisque x est compris entre -1 et 1, il existe un unique réel θ dans $[0, \pi]$ tel que $x = \cos(\theta)$. On a alors :

$$T_n(x) = 0 \Longleftrightarrow T_n(\cos(\theta)) = 0 \Longleftrightarrow \cos(n\theta) = 0 \Longleftrightarrow n\theta \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi] \Longleftrightarrow \theta \equiv \frac{\pi}{2n}\ \left[\frac{\pi}{n}\right]$$

$$\Longleftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z},\ \theta = \frac{\pi}{2n} + k\,\frac{\pi}{n} \Longleftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z},\ \theta = \frac{(2k+1)\pi}{2n}$$

Posons alors, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\theta_k = \dfrac{(2k+1)\pi}{2n}$. Il est clair que les réels θ_k sont n réels distincts de $[0, \pi]$. Puisque la restriction de la fonction cos à l'intervalle $[0, \pi]$ est injective, les réels $(\cos(\theta_k))_{k\in[\![0,n-1]\!]}$ sont n réels distincts de l'intervalle $[-1, 1]$; qui plus est, ce sont (par construction) n racines distinctes du polynôme T_n.

Conclusion : pour tout entier naturel n non nul, le polynôme T_n possède n racines distinctes qui sont les réels : $\cos\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$ avec $k \in [\![0, n-1]\!]$.

EXERCICE 51. — (A propos des polynômes de Tchebychev).

L'objectif de cet exo est d'établir que pour tout entier naturel n, il existe un unique polynôme T_n à coefficients réels tel que :

$$\forall\, \theta \in \mathbb{R}, \qquad T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$$

Cet unique polynôme T_n est appelé **n-ème polynôme de Tchebychev** (de première espèce).

1/ **Unicité**. Soit n un entier naturel, et soient P et Q deux polynômes tels que :

$$\forall\, \theta \in \mathbb{R}, \quad P(\cos(\theta)) = \cos(n\theta) \ \wedge\ Q(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$$

Montrer que $P = Q$.

D'après l'énoncé, pour tout réel θ, on a : $P(\cos(\theta)) = Q(\cos(\theta))$. Il s'ensuit que P et Q coïncident en une infinité de réels (tous les réels de $[-1, 1]$). D'après le principe du prolongement algébrique, ils sont égaux.

Conclusion. $[\forall\, \theta \in \mathbb{R}, \quad P(\cos(\theta)) = \cos(n\theta) \ \wedge\ Q(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)] \Longrightarrow [P = Q]$.

2/ **Existence et expression**. Soient n un entier naturel et θ un réel.

a/ Etablir que : $$\cos(n\theta) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{i}^k \sin^k(\theta)\cos^{n-k}(\theta)\right)$$

D'après la formule de Moivre : $\cos(n\theta) = \mathrm{Re}\left[(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta))^n\right]$.

D'après la formule du binôme de Newton : $\cos(n\theta) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} i^k \sin^k(\theta)\cos^{n-k}(\theta)\right)$.

Conclusion. $\forall (n, \theta) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R},\ \cos(n\theta) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} i^k \sin^k(\theta)\cos^{n-k}(\theta)\right)$

b/ Soit $n \in \mathbb{N}$. Déduire de ce qui précède que : $$T_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} \left(X^2 - 1\right)^k X^{n-2k}.$$

Soient θ un réel et n un entier naturel. D'après la question précédente, on a :

$$\cos(n\theta) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{i}^k \sin^k(\theta)\cos^{n-k}(\theta)\right)$$

Puisque i^k est réel si et seulement si k est pair, on a donc :

$$\cos(n\theta) = \sum_{k=0,\ k \text{ pair}}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{i}^k \sin^k(\theta)\cos^{n-k}(\theta)$$

Il reste à observer que les entiers pairs compris entre 0 et n sont exactement ceux de l'ensemble :

$$\left\{2k' \ / \ k' \in [\![\, 0, \left\lfloor \tfrac{n}{2} \right\rfloor \,]\!]\right\}$$

On en déduit que : $\cos(n\theta) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} (-1)^k \sin^{2k}(\theta)\cos^{n-2k}(\theta) \qquad (\spadesuit)$

Or : $(-1)^k \sin^{2k}(\theta) = \left(-\sin^2(\theta)\right)^k = \left(\cos^2(\theta) - 1\right)^k \qquad (\clubsuit)$

D'après ($\spadesuit$) et ($\clubsuit$) : $\cos(n\theta) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} \left(\cos^2(\theta) - 1\right)^k \cos^{n-2k}(\theta)$

On pose alors : $T_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} \left(X^2 - 1\right)^k X^{n-2k}$.

Il résulte des calculs précédents que : $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$. D'après la question 1, T_n est l'unique polynôme de $\mathbb{R}[X]$ tel que : $\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$.

Conclusion. Le n-ème polynôme de Tchebychev est : $T_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} \left(X^2 - 1\right)^k X^{n-2k}$.