

# EXERCICES 19 — POLYNÔMES

## PARTIE 1 - DEGRÉ, COEFFICIENT DOMINANT, DIVISION EUCLIDIENNE.

**EXERCICE 1.** — (Degré et coefficient dominant)

1/ Calculer le degré et le coefficient dominant de  $P = (1 + X)^2 + (1 - X)^2$

2/ Calculer le degré et le coefficient dominant de  $P = (1 + X)^3 + (1 - X)^3$

3/ Soit  $n$  un entier naturel non nul. Calculer le degré et le coefficient dominant de  $P = (1 + X)^n + (1 - X)^n$

**EXERCICE 2.** — (Utilisation du degré) Soit  $n$  un entier naturel.

Prouver qu'il n'existe aucun polynôme  $P$  tel que :  $P^2 = X(X^{2n} + 1)$

**EXERCICE 3.** — Déterminer tous les polynômes  $P \in \mathbb{R}[X]$  solutions de l'équation :

$$(E) \quad P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)$$

**EXERCICE 4.** — (Utilisation du degré et du coefficient dominant) Déterminer tous les polynômes  $P$  tels que :  $P^2 = 4P$

**EXERCICE 5.** — (Utilisation du degré et du coefficient dominant) Déterminer tous les polynômes  $P$  tels que

$$P^3 = X^2P$$

**EXERCICE 6.** — (Division euclidienne). Effectuer la division euclidienne de  $A = 5X + 7$  par  $B = X^3 + 2$ , puis celle de  $B$  par  $A$ .

**EXERCICE 7.** — (Division euclidienne). Effectuer la division euclidienne de  $A = 2X^4 - 3X^3 + 4X^2 - 5X + 6$  par  $B = X^2 - 3X + 1$ .

**EXERCICE 8.** — (Division euclidienne). A quelle condition le polynôme  $X^4 + aX^2 + bX + c$  est-il divisible par  $X^2 + X + 1$  ?

**EXERCICE 9.** — (Inversibles de  $\mathbb{K}[X]$ ) Soit  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Déterminer  $\mathbb{K}[X]^*$ .

**Seconde formulation.** Quels sont les polynômes de l'anneau  $\mathbb{K}[X]$  inversibles pour la multiplication ?

**Troisième formulation.** Déterminer tous les polynômes  $P \in \mathbb{K}[X]$  pour lesquels il existe un polynôme  $Q \in \mathbb{K}[X]$  tels que  $PQ = 1$ .

**EXERCICE 10.** — (Utilisation du coefficient dominant) Déterminer tous les polynômes  $P$  tels que

$$P = XP'$$

où  $P'$  désigne le polynôme dérivé de  $P$ .

## PARTIE 2 - DIVISION EUCLIDIENNE, UTILISATION DES RACINES.

**EXERCICE 11.** — (Division euclidienne) Le reste de la division euclidienne d'un polynôme  $P$  par  $(X - 2)$  est 3 et par  $(X + 2)$  est 2. Quel est le reste de la division euclidienne de  $P$  par  $(X^2 - 4)$  ?

**EXERCICE 12.** — (Division euclidienne). Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux éléments distincts de  $\mathbb{K}$  (avec  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ), et soit  $P$  un polynôme de  $\mathbb{K}[X]$ .

Déterminer le reste dans la division euclidienne de  $P$  par  $Q = (X - \alpha)(X - \beta)$ .

**EXERCICE 13.** — (**Division euclidienne, bis**). Soit  $\alpha$  un élément de  $\mathbb{K}$  (avec  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ), et soit  $P$  un polynôme de  $\mathbb{K}[X]$ .

Déterminer le reste dans la division euclidienne de  $P$  par  $Q = (X - \alpha)^2$ .

**EXERCICE 14.** — Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Déterminer le reste dans la division euclidienne de  $X^n$  par  $B = X^2 - 3X + 2$ .

**EXERCICE 15.** — Soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$  telle que :  $A^2 - 3A + 2I_n = 0_{M_n(\mathbb{K})}$ .

Etablir que pour tout entier naturel  $N$ , la matrice  $A^N$  est combinaison linéaire de  $A$  et de  $I_n$  (c'est à dire qu'il existe deux scalaires  $a_N$  et  $b_N$  tels que :  $A^N = a_N A + b_N I_n$ ).

**EXERCICE 16.** — Soit  $n$  un entier naturel. Déterminer le reste dans la division euclidienne de  $X^n$  par  $X^3 - 10X^2 + 16X$ .

**EXERCICE 17.** — Soient  $m, n$  et  $p$  trois entiers naturels, et  $\theta$  un nombre réel. Vérifier dans chacun des cas suivants que le polynôme  $A$  divise le polynôme  $B$  :

1/  $A = 2X^3 - 3X^2 + X$  et  $B = (X - 1)^{2n} - X^{2n} + 2X - 1$ .

2/  $A = X^2 + X + 1$  et  $B = X^{3n+2} + X^{3m+1} + X^{3p}$ .

3/  $A = X^2 - 2X \cos \theta + 1$  et  $B = X^{2n} - 2X^n \cos(n\theta) + 1$  avec  $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ .<sup>1</sup>

**EXERCICE 18.** — Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$ . Etablir que si  $\alpha \in \mathbb{C}$  est racine de  $P$ , alors  $\bar{\alpha}$  est racine de  $P$ .

**EXERCICE 19.** — Factoriser dans  $\mathbb{R}[X]$  le polynôme :  $P = X^4 - X^3 + 2X^2 - 2X + 4$  après avoir calculé  $P(1 + i)$ .

**EXERCICE 20.** — Factoriser le polynôme  $P = X^4 + 2X^3 - 2X^2 + 2X - 3$ , dans  $\mathbb{C}[X]$  et dans  $\mathbb{R}[X]$ .

Indication : on pourra calculer  $P(i)$ .

**EXERCICE 21.** — Etablir qu'il existe un unique polynôme  $P \in \mathbb{R}_2[X]$ , que l'on déterminera, tel que :

$$P(-1) = 1; \quad P(0) = -2 \quad \text{et} \quad P(2) = 1$$

**EXERCICE 22.** — Soient  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  et  $\alpha_4$  quatre réels, deux à deux distincts.

Etablir que l'application :

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}_3[X] &\longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ P &\longmapsto (P(\alpha_1), P(\alpha_2), P(\alpha_3), P(\alpha_4)) \end{aligned}$$

est bijective.

**EXERCICE 23.** — Soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$  telle que :  $A^2 - 5A + 6I_n = 0_{M_n(\mathbb{K})}$ .

Etablir que pour tout entier naturel  $N$ , il existe deux scalaires  $a_N$  et  $b_N$  tels que :  $A^N = a_N A + b_N I_n$ .

**EXERCICE 24.** — Soit  $z$  un nombre complexe.

Etablir que le polynôme  $P = (X - z)(X - \bar{z})$  est à coefficients réels.

**EXERCICE 25.** — Factoriser le polynôme  $P = X^3 - 1$ , dans  $\mathbb{C}[X]$  et dans  $\mathbb{R}[X]$ .

1. Càd que  $\theta$  est un réel non multiple de  $\pi$ .

**EXERCICE 26.** — Factoriser le polynôme  $P = X^6 - 1$ , dans  $\mathbb{C}[X]$  et dans  $\mathbb{R}[X]$ .

**EXERCICE 27.** — Soient  $n$  un entier naturel  $\geq 2$  et  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$  ( $n+1$ ) réels, deux à deux distincts. Etablir que l'application :

$$F : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$$

$$P \longmapsto (P(\alpha_0), P(\alpha_1), \dots, P(\alpha_n))$$

est bijective.

**EXERCICE 28.** — Factoriser le polynôme  $P = X^4 + 1$ , dans  $\mathbb{C}[X]$  et dans  $\mathbb{R}[X]$ .

**EXERCICE 29.** — Factoriser le polynôme  $P = X^4 - X^2 + 2X - 1$  dans  $\mathbb{R}[X]$ .

### PARTIE 3 - MULTIPLICITÉ D'UNE RACINE, POLYNÔMES INTERPOLATEURS.

**EXERCICE 30.** — Démontrer la **formule de Taylor pour les polynômes** : pour tout polynôme  $P \in \mathbb{K}[X]$  de degré  $n$ , on a

$$P = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k$$

**EXERCICE 31.** — Le but de cet exercice est de mettre en exergue une propriété des polynômes de Lagrange. On considère les 3 réels :  $\alpha_0 = -1$ ,  $\alpha_1 = 1$  et  $\alpha_2 = 2$ .

On définit  $L_0, L_1$  et  $L_2$  comme les 3 polynômes de Lagrange associés aux réels  $-1, 1$  et  $2$ .

1/ Par définition,  $L_0, L_1$  et  $L_2$  appartiennent à  $\mathbb{R}_n[X]$  ; pour quelle valeur de  $n$  ?<sup>2</sup>

2/ Déterminer les expressions des polynômes de Lagrange  $L_0, L_1$  et  $L_2$  associés aux trois réels  $-1, 1$  et  $2$ .

3/ **Trois exemples pour commencer à comprendre.**

a/ On pose  $Q = L_0 + L_1 + L_2$ . Calculer explicitement le polynôme  $Q$  (c'est-à-dire déterminer explicitement ses coefficients).

b/ On pose  $R = -L_0 + L_1 + 2L_2$ . Calculer explicitement le polynôme  $R$ .

c/ On pose  $S = L_0 + L_1 + 4L_2$ . Calculer explicitement le polynôme  $S$ .

4/ **Généralisation.**

a/ Soit  $P \in \mathbb{R}_2[X]$ . On pose  $P_1 = P(-1)L_0 + P(1)L_1 + P(2)L_2$ . A la lumière des exemples ci-dessus, que peut-on dire des polynômes  $P$  et  $P_1$  ?

b/ Justifier la réponse à la question précédente.

2. Sous-entendu : quelle est la **plus petite valeur** de  $n$  qui convient.

**EXERCICE 32.** — On pose  $P = X^4 - 2X^2 + 3X + 5 \in \mathbb{R}_4[X]$ .

On considère par ailleurs les 5 polynômes de Lagrange  $L_0, L_1, L_2, L_3$  et  $L_4$  associés aux réels 0, 1, 2, 3 et 4.

**Les deux questions sont indépendantes.**

1/ Exprimer  $P$  en fonction de  $L_0, L_1, L_2, L_3$  et  $L_4$ .

2/ Exprimer  $P$  en fonction de 1,  $(X + 1)$ ,  $(X + 1)^2$ ,  $(X + 1)^3$  et  $(X + 1)^4$ .

**EXERCICE 33.** — Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On considère  $(n + 1)$  scalaires  $\alpha_0, \dots, \alpha_n$  deux à deux distincts, et  $L_0, \dots, L_n$  les  $(n + 1)$  polynômes de Lagrange (de  $\mathbb{K}_n[X]$ ) associés à  $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ .

Soit  $P \in \mathbb{K}_n[X]$ .

**Les deux questions sont indépendantes.**

1/ On pose :  $Q = \sum_{k=0}^n P(\alpha_k)L_k$ . Montrer que  $P = Q$ .

2/ Exprimer  $P$  en fonction de 1,  $(X + 1), \dots, (X + 1)^n$ .

**EXERCICE 34.** — Etablir que 1 est racine de multiplicité 4 de  $P = X^5 - X^4 - 6X^3 + 14X^2 - 11X + 3$ .

**EXERCICE 35.** — Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Déterminer  $a$  et  $b$  pour que  $P = aX^{n+1} + bX^n + 1$  soit divisible par  $(X - 1)^2$ .

**EXERCICE 36.** — Soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 3$ . Montrer que le polynôme  $P = X^{2n} - nX^{n+1} + nX^{n-1} - 1$  est divisible par  $(X - 1)^3$ , mais n'est pas divisible par  $(X - 1)^4$ .

**EXERCICE 37.** — Déterminer la valeur de  $m$  pour que 1 soit racine double<sup>3</sup> du polynôme  $P_m = X^3 - 3X + m$ .

**EXERCICE 38.** — Déterminer les racines (dans  $\mathbb{C}$ ) du polynôme  $P = \sum_{k=0}^n \left[ \binom{n}{k} 3^k (1 - X)^{3n-2k} X^k \right]$  ainsi que leurs multiplicités.

#### PARTIE 4 - MULTIPLICITÉ D'UNE RACINE (BIS), POLYNÔMES IRRÉDUCTIBLES.

**EXERCICE 39.** — Etablir que le polynôme  $X^2 - 4X + 3$  n'est pas irréductible dans  $\mathbb{R}[X]$ .

**EXERCICE 40.** — Etablir que le polynôme  $X^2 - 3X + 4$  est irréductible dans  $\mathbb{R}[X]$ .

**EXERCICE 41.** — Décomposer en irréductibles dans  $\mathbb{C}[X]$  puis dans  $\mathbb{R}[X]$  les polynômes suivants<sup>4</sup> :

$$P_1(X) = X^4 - 16 \quad P_2(X) = X^3 - 8 \quad P_3(X) = X^3 + X^2 + X + 1$$

3. C-à-d de multiplicité exactement 2.

4. Dans  $\mathbb{C}[X]$ , les polynômes irréductibles sont exactement ceux de degré 1. Dans  $\mathbb{R}[X]$ , les polynômes irréductibles sont exactement ceux de degré 1, et ceux de degré 2 sans racine réelle ("avec un  $\Delta < 0$ ").

**EXERCICE 42.** — Dans  $\mathbb{R}_6[X]$ , on considère l'ensemble  $E$  des polynômes  $P$  admettant 1 comme racine de multiplicité au moins 3.

1/ Par définition, que signifie l'assertion “ $P$  admet 1 comme racine de multiplicité au moins 3” ?

2/ Montrer qu'il existe quatre polynômes  $P_1, P_2, P_3$  et  $P_4$  à coefficients réels tel que :

$$\forall P \in E, \exists (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \in \mathbb{R}^4, P = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3 + \alpha_4 P_4.$$

**EXERCICE 43.** — Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$ , et soit  $a \in \mathbb{R}$ . On suppose que  $P(a) > 0$  et :  $\forall k \in \mathbb{N}^*, P^{(k)}(a) \geq 0$ .  
Etablir que :  $\forall x \geq a, P(x) > 0$ .

**EXERCICE 44.** — On considère l'application  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = e^{-x^2}$ .

1) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la dérivée  $n$ -ième de  $f$  est  $f^{(n)} : x \in \mathbb{R} \mapsto P_n(x)e^{-x^2}$ , avec  $P_n$  polynôme à coefficients réels. Calculer  $P_0, P_1$  et  $P_2$ .

2) Préciser le degré et le coefficient dominant de  $P_n$ .

3) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}$  on a :  $P_{n+1}(x) = 2xP_n(x) + 2nP_{n-1}(x) = 0$ .

On pourra utiliser le fait que :  $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -2xf(x)$ .

**EXERCICE 45.** — (Décomposition en irréductibles).

Décomposer en polynômes irréductibles dans  $\mathbb{C}[X]$  puis dans  $\mathbb{R}[X]$  les polynômes :

1/  $P = X^4 - X$

2/  $Q = X^6 + X^4 + X^2 + 1$

**EXERCICE 46.** — (Multiplicité, décomposition en irréductibles,  $\mathbb{U}_3$ ). On pose :

$$P = (X^4 - X)(X^2 + X + 1)$$

1/ Déterminer les racines dans  $\mathbb{C}$ , ainsi que les multiplicités, du polynôme  $P$ .

2/ Déterminer la décomposition en irréductibles du polynôme  $P$  dans  $\mathbb{C}[X]$ , puis dans  $\mathbb{R}[X]$ .

**EXERCICE 47.** — (Multiplicité,  $\mathbb{U}_3$ ). On pose :

$$P_1 = (X^2 + X + 1)^3 (X - 2)(X^2 + 1)(X^3 - 1); \quad P_2 = (X^2 + X + 1)^2 (X^3 - 1)^2 (X^2 + 1)$$

Déterminer les racines dans  $\mathbb{C}$ , ainsi que les multiplicités, des polynômes  $P_1$  et  $P_2$ .

**EXERCICE 48.** — (Un exo pas trop complexe). Soit  $P$  un polynôme non nul de  $\mathbb{R}[X]$ .

On suppose que  $i$  et  $j$  sont racines de  $P$ .

Etablir que  $P$  n'est pas irréductible dans  $\mathbb{R}[X]$ .

**EXERCICE 49.** — (Utilisation des racines 5-èmes de l'unité). On pose :

$$P = \sum_{k=0}^4 X^k \quad \text{càd} \quad P = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$$

Déterminer la décomposition en irréductibles du polynôme  $P$  dans  $\mathbb{C}[X]$ , puis dans  $\mathbb{R}[X]$ .

**PARTIE 5 - DEUX EXOS CLASSIQUES.**

**EXERCICE 50.** — (A propos des polynômes de Tchebychev).

On définit une suite de polynômes  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  en posant

$$T_0 = 1, \quad T_1 = X, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$$

Ces polynômes sont appelés *polynômes de Tchebychev de première espèce*.

- 1/ Expliciter  $T_2$  et  $T_3$ .
- 2/ Pour tout entier naturel  $n$ , déterminer le degré de  $P$  et son coefficient dominant.
- 3/ Etablir que :  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall \theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$
- 4/ Soit à présent  $n$  un entier naturel non nul. Montrer que  $T_n$  admet  $n$  racines deux à deux distinctes dans l'intervalle  $[-1, 1]$ .

**EXERCICE 51.** — (Polynômes de Tchebychev, deuxième acte).

L'objectif de cet exo est d'établir que pour tout entier naturel  $n$ , il existe un unique polynôme  $T_n$  à coefficients réels tel que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$$

Cet unique polynôme  $T_n$  est appelé  **$n$ -ème polynôme de Tchebychev** (de première espèce).

- 1/ **Unicité.** Soit  $n$  un entier naturel, et soient  $P$  et  $Q$  deux polynômes tels que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad P(\cos(\theta)) = \cos(n\theta) \wedge Q(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$$

Montrer que  $P = Q$ .

- 2/ **Existence et expression.** Soient  $n$  un entier naturel et  $\theta$  un réel.

a/ Etablir que :

$$\cos(n\theta) = \operatorname{Re} \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} i^k \sin^k(\theta) \cos^{n-k}(\theta) \right)$$

b/ Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Dédurre de ce qui précède que :

$$T_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} (X^2 - 1)^k X^{n-2k}.$$