

COLLE 20 – QUESTIONS DE COURS

QUESTION DE COURS 1 — Propriété. $\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$, $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$.

PREUVE. Soient P et Q dans $\mathbb{K}[X]$. Si l'un au moins des polynômes est nul, la propriété est immédiate.

Supposons à présent P et Q non nuls, et notons :

$$P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \text{ et } Q = \sum_{k=0}^m b_k X^k \text{ avec } n = \deg P, m = \deg Q \text{ (d'où } a_n \neq 0 \text{ et } b_m \neq 0).$$

Selon le cours : $PQ = \sum_{k=0}^{n+m} \left(\sum_{j=0}^k a_j b_{k-j} \right) X^k$. Ainsi : $PQ = a_n b_m X^{n+m} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n+m-1} \left(\sum_{j=0}^k a_j b_{k-j} \right) X^k}_{\text{degré} < n+m}$

Puisque $a_n b_m \neq 0$, on en déduit que : $\deg(PQ) = n + m$, soit : $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$.

Conclusion. $\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$, $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$.

QUESTION DE COURS 2 — Propriété. $\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$, $\deg(P + Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$

PREUVE. Soient P et Q dans $\mathbb{K}[X]$. Si l'un au moins des polynômes est nul, la propriété est immédiate.

Supposons à présent P et Q non nuls, et notons :

$$P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \text{ et } Q = \sum_{k=0}^m b_k X^k \text{ avec } n = \deg P, m = \deg Q \text{ (d'où } a_n \neq 0 \text{ et } b_m \neq 0).$$

On distingue deux cas, suivant que les degrés de P et Q sont égaux ou non.

Premier cas — $\deg(P) = \deg(Q)$. Alors $n = m$, et : $P + Q = \sum_{k=0}^n (a_k + b_k) X^k$.

Il s'ensuit que : $\deg(P + Q) \leq n$, soit : $\deg(P + Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$.

Second cas — $\deg(P) \neq \deg(Q)$. SNALG, on peut supposer $n > m$.

$$\text{Alors : } P + Q = \underbrace{\sum_{k=m+1}^n a_k X^k}_{=P} + \underbrace{\sum_{k=0}^m a_k X^k + \sum_{k=0}^m b_k X^k}_{=Q}$$

$$\text{D'où : } P + Q = a_n X^n + \underbrace{\sum_{k=m+1}^{n-1} a_k X^k + \sum_{k=0}^m (a_k + b_k) X^k}_{\text{degré} < n} \quad \text{D'où : } \deg(P + Q) = n$$

Il s'ensuit que : $\deg(P + Q) = n$. En particulier : $\deg(P + Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$.

Conclusion. $\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$, $\deg(P + Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$

QUESTION DE COURS 3 — Propriété. Deux polynômes P et Q de $\mathbb{K}[X]$ sont associés SSI il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $Q = \lambda P$.

ET Conséquence : deux polynômes associés ont même degré.

PREUVE. Soient P et Q dans $\mathbb{K}[X]$ deux polynômes associés : $P|Q$ et $Q|P$.

Alors : $\exists (R_1, R_2) \in \mathbb{K}[X]^2$, $Q = PR_1$ et $P = QR_2$.

On en déduit que : $Q = QR_1 R_2$ d'où : $Q(1 - R_1 R_2) = \tilde{0}$.

L'anneau $\mathbb{K}[X]$ étant intègre, on en déduit que $Q = \tilde{0}$ ou $1 - R_1 R_2 = \tilde{0}$.

Premier cas — $Q = \tilde{0}$. Alors $P = \tilde{0}$, et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $Q = \lambda P$, wouaouh.

Second cas — $Q \neq \tilde{0}$. Alors $1 - R_1 R_2 = \tilde{0}$, d'où : $R_1 R_2 = 1$. On en déduit que R_1 et R_2 sont non nuls ; leurs degrés respectifs n_1 et n_2 sont donc des entiers naturels tels que : $n_1 + n_2 = 0$.

On en déduit que : $n_1 = n_2 = 0$. En particulier : $\exists \lambda \in \mathbb{K}^*$, $R_1 = \lambda$. Par suite : $Q = \lambda P$.

Ainsi : P et Q associés $\implies$ il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $Q = \lambda P$

La réciproque demande moins d'efforts : s'il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $Q = \lambda P$, alors on a également $P = \lambda^{-1}Q$. Ces deux égalités signifient respectivement que $P|Q$ et $Q|P$: les polynômes P et Q sont donc associés.

Ainsi : P et Q associés $\iff$ il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $Q = \lambda P$

Conclusion. P et Q associés $\iff$ il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $Q = \lambda P$

Prouvons la **Conséquence** : deux polynômes associés ont même degré.

Soient P et Q deux polynômes associés. D'après la propriété précédente : $\exists \lambda \in \mathbb{K}^*, Q = \lambda P$

Par suite : $\deg Q = \deg(\lambda P) = \deg \lambda + \deg P = \deg P$. D'où la conclusion.

QUESTION DE COURS 4 — Propriété. $\mathbb{K}[X]^* = \mathbb{K}^*$ (l'anneau $\mathbb{K}[X]$ est commutatif et intègre, mais ce n'est pas un corps).

PREUVE. Soit $P \in \mathbb{K}[X]^*$. Il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que : $PQ = 1$. Cette égalité implique que P et Q ne sont pas nuls, et leurs degrés respectifs n et m sont des entiers naturels tels que : $n + m = 0$. Il s'ensuit que $n = m = 0$.

En particulier : $\deg P = 0$. Donc : $\exists \lambda \in \mathbb{K}^*, P = \lambda$. D'où : $P \in \mathbb{K}^*$.

On a ainsi établi que : $P \in \mathbb{K}[X]^* \implies P \in \mathbb{K}^*$. D'où l'inclusion : $\mathbb{K}[X]^* \subset \mathbb{K}^*$.

L'inclusion $\mathbb{K}^* \subset \mathbb{K}[X]^*$ est immédiate. **Conclusion.** $\mathbb{K}[X]^* = \mathbb{K}^*$

QUESTION DE COURS 5 — Propriété. L'anneau $(\mathbb{K}[X], +, \times)$ est intègre.

PREUVE. Soient P et Q dans $\mathbb{K}[X]$ tels que : $PQ = \tilde{0}$. Alors : $\deg(P) + \deg(Q) = -\infty$.

On en déduit que $\deg P = -\infty$ ou $\deg Q = -\infty$, càd : $P = \tilde{0}$ ou $Q = \tilde{0}$.

On a ainsi établi que : $PQ = \tilde{0} \implies P = \tilde{0}$ ou $Q = \tilde{0}$. **Conclusion.** L'anneau $(\mathbb{K}[X], +, \times)$ est intègre.

QUESTION DE COURS 6 — Lemme. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $P \neq \tilde{0}$. Il existe un unique polynôme unitaire associé à P .

PREUVE. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $P \neq \tilde{0}$. Posons : $Q = \frac{1}{\text{cd}(P)} P$. On a : $\text{cd}(Q) = \frac{1}{\text{cd}(P)} \text{cd}(P) = 1$.

Le polynôme Q est donc unitaire, et associé à P ; ce qui prouve l'existence.

Prouvons l'unicité : supposons qu'il existe deux polynômes unitaires Q_1 et Q_2 associés à P . Alors Q_1 et Q_2 sont associés (par transitivité de la relation de divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$).

Donc : $\exists \lambda \in \mathbb{K}^*, Q_2 = \lambda Q_1$. D'où : $\text{cd}(Q_1) = \lambda \text{cd}(Q_2)$. D'où $\lambda = 1$, puisque Q_1 et Q_2 sont unitaires. Par suite $Q_2 = Q_1$; ce qui prouve l'unicité.

Conclusion. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $P \neq \tilde{0}$. Il existe un unique polynôme unitaire associé à P .

QUESTION DE COURS 7 — Lemme. Pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$, le reste dans la division euclidienne du polynôme P par le polynôme $(X - \alpha)$ est le polynôme constant $\tilde{P}(\alpha)$.

ET Conséquence : α est racine de P SSI $(X - \alpha)$ divise P .

PREUVE. Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.

D'après le théorème de la division euclidienne : $\exists (Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$, $P = (X - \alpha)Q + R$, avec $\deg(R) < 1$. On en déduit que R est constant : $\exists \lambda \in \mathbb{K}$, $R = \lambda$.

On a donc : $P = (X - \alpha)Q + \lambda$. L'évaluation en α de cette relation donne $P(\alpha) = \lambda$ et la conclusion du lemme.

Conséquence. Supposons que α soit racine de P . Alors $P(\alpha) = 0$ (par définition de racine), et le reste de la division euclidienne de P par $(X - \alpha)$ est nul (d'après le lemme). Il s'ensuit que $(X - \alpha)|P$.

Ainsi : $[\alpha \text{ racine de } P] \implies [(X - \alpha)|P]$. La réciproque est triviale.

Conclusion. α est racine de P SSI $(X - \alpha)|P$

BANQUE D'EXERCICES

EXERCICE 1 — Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Degré et coefficient dominant de $P = (1 + X)^n + (1 - X)^n$

EXERCICE 2 — Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(\mathbb{K}_n[X], +)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{K}[X], +)$.

EXERCICE 3 — Etablir que : $\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2$, $\binom{n+m}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{m}{n-k}$ (formule de Vandermonde)

EXERCICE 4 — Résoudre dans $\mathbb{K}[X]$ l'équation (E) $P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)$

EXERCICE 5 — Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer le reste dans la division euclidienne de X^n par $X^2 - 7X + 6$.

EXERCICE 6 — Soient $p \in \mathbb{N}^*$, et $A \in M_p(\mathbb{K})$ une matrice telle que $A^2 - 7A + 6I_p = 0_{M_p(\mathbb{K})}$.
Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

BANQUE D'EXERCICES - CORRIGÉS

EXERCICE 1 — Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Degré et coefficient dominant de $P = (1 + X)^n + (1 - X)^n$

Une double application du binôme de Newton donne : $P = (1 + (-1)^n)X^n + n(1 + (-1)^{n-1})X^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} (1 + (-1)^k)X^k$

Lorsque n est pair, on a : $(1 + (-1)^n) = 2$. D'où : $\deg(P) = n$ et $\text{cd}(P) = 2$.

Lorsque n est impair, on a : $(1 + (-1)^n) = 0$ et $n(1 + (-1)^{n-1}) = 2n$. D'où : $\deg(P) = n - 1$ et $\text{cd}(P + Q) = 2n$.

EXERCICE 2 — Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(\mathbb{K}_n[X], +)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{K}[X], +)$.

On rappelle que $\mathbb{K}_n[X] = \{P \in \mathbb{K}[X], \deg(P) \leq n\}$.

Par définition $\mathbb{K}_n[X]$ est une partie de $\mathbb{K}[X]$ contenant le polynôme nul (SG1 et SG2).

En outre, si P et Q sont dans $\mathbb{K}_n[X]$, alors : $\deg(P + Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$. D'où : $\deg(P + Q) \leq n$ puisque $\deg P$ et $\deg Q$ sont $\leq n$.

On a ainsi établi que : $P \in \mathbb{K}_n[X]$ et $Q \in \mathbb{K}_n[X] \implies P + Q \in \mathbb{K}_n[X]$. Ce qui signifie que $\mathbb{K}_n[X]$ est stable pour la loi + (SG3).

Enfin, si $P \in \mathbb{K}_n[X]$, alors $(-P) \in \mathbb{K}_n[X]$, puisque $\deg(-P) = \deg P$. Ce qui signifie que $\mathbb{K}_n[X]$ est stable par passage à l'opposé (SG4).

Conclusion. $(\mathbb{K}_n[X], +)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{K}[X], +)$. En particulier, $(\mathbb{K}_n[X], +)$ est un groupe abélien.

EXERCICE 3 — Etablir que : $\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, \binom{n+m}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{m}{n-k}$ (formule de Vandermonde)

Posons $P = (1 + X)^n$ et $Q = (1 + X)^m$.

On a : $PQ = (1 + X)^{n+m} = \sum_{j=0}^{n+m} \binom{n+m}{j} X^j$ (♠)

Par ailleurs : $P = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} X^j$ et $Q = \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} X^j$. Selon la formule donnant le produit de deux polynômes, on en déduit :

$$PQ = \sum_{j=0}^{n+m} \left(\sum_{k=0}^j \binom{n}{k} \binom{m}{j-k} \right) X^j \quad (\clubsuit)$$

Selon (♠) et (♣) : $\sum_{j=0}^{n+m} \binom{n+m}{j} X^j = \sum_{j=0}^{n+m} \left(\sum_{k=0}^j \binom{n}{k} \binom{m}{j-k} \right) X^j$

En identifiant les coefficients de X^n dans ces deux expressions, on obtient : $\binom{n+m}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{m}{n-k}$.

Conclusion. $\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, \binom{n+m}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{m}{n-k}$

EXERCICE 4 — Résoudre dans $\mathbb{K}[X]$ l'équation (E) $P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)$

Le polynôme nul est solution de l'équation.

Supposons à présent P non nul, et notons $n = \deg P$.

Si P est solution de l'équation, alors : $\deg P(X^2) = \deg (X^2 + 1)P(X)$ soit : $2n = n + 2$ d'où $n = 2$.

On cherche donc P sous la forme d'un polynôme de degré 2 : $P = aX^2 + bX + c$ avec $a \neq 0$.

Alors : $P(X^2) = (X^2 + 1)P(X) \iff aX^4 + bX^2 + c = aX^4 + bX^3 + (c + a)X^2 + bX + c$.

Par identification, on en déduit que $b = 0$ et $c = -a$.

Donc : P non nul solution $\implies \exists a \in \mathbb{K}^*, P = aX^2 - a$. La réciproque est une vérification immédiate.

Puisque le polynôme nul est également solution, on peut conclure.

Conclusion. L'ensemble des solutions de l'équation est $\{a(X^2 - 1), a \in \mathbb{K}\}$.

Remarque. L'ensemble des solutions $\mathcal{S}$ est l'ensemble des polynômes **colinéaires** au polynôme $(X^2 - 1)$. Très prochainement, nous pourrions dire que $\mathcal{S}$ est une droite vectorielle dans $\mathbb{K}[X]$, de vecteur directeur $(X^2 - 1)$.

EXERCICE 5 — Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer le reste dans la division euclidienne de X^n par $X^2 - 7X + 6$.

D'après le théorème de la division euclidienne, il existe un unique couple (Q, R) de polynômes tel que :

$$X^n = (X^2 - 7X + 6)Q + R \text{ et } \deg(R) < 2$$

Il s'ensuit que le reste R est de degré au plus 1, et qu'il existe donc deux scalaires tels que $R = aX + b$. On a donc :

$$X^n = (X^2 - 7X + 6)Q + aX + b \quad (\spadesuit)$$

$$\text{Or : } X^2 - 7X + 6 = (X - 1)(X - 6).$$

$$\text{Donc : } X^n = (X - 1)(X - 6)Q + aX + b.$$

$$\text{En évaluant en 1 et en 6 cette relation, on obtient : } \begin{cases} 1 = a + b \\ 6^n = 6a + b \end{cases} \iff \begin{cases} a = \frac{6^n - 1}{5} \\ b = \frac{6 - 6^n}{5} \end{cases}$$

Conclusion. Le reste dans la division euclidienne de X^n par $X^2 - 7X + 6$ est :

$$R = \frac{6^n - 1}{5} X + \frac{6 - 6^n}{5}$$

EXERCICE 6 — Soient $p \in \mathbb{N}^*$, et $A \in M_p(\mathbb{K})$ une matrice telle que $A^2 - 7A + 6I_p = 0_{M_p(\mathbb{K})}$. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

D'après l'exercice précédent :

$$\exists Q \in \mathbb{K}[X], X^n = (X^2 - 7X + 6)Q + \frac{6^n - 1}{5} X + \frac{6 - 6^n}{5}$$

Il s'ensuit que :

$$A^n = (A^2 - 7A + 6I_p)Q(A) + \frac{6^n - 1}{5} A + \frac{6 - 6^n}{5} I_p$$

Or par hypothèse : $A^2 - 7A + 6I_p = 0_{M_p(\mathbb{K})}$.

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = \frac{6^n - 1}{5} A + \frac{6 - 6^n}{5} I_p$