MPSI – Colle 20 (18 au 22 mars 2023) : Polynômes - DL

Chapitre 18 : DL - Révisions : formulaire + calcul "simple"

Chapitre 19 : Polynômes

1 – Généralités

2 – Degré, coefficient dominant

3 – Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$

Seulement : relation de divisibilité, polynômes associés, théorème de la division euclidienne, lemme de Gauss.

Aucune autre question spécifique sur ce thème n'est attendue lors cette colle : pas de calcul de PGCD, de PPCM, de coefficients de Bezout.

4 – Fonctions polynomiales

a – Racines d'un polynôme

Application à la factorisation. Majoration du nombre de racines par le degré.

Questions de cours

- **Propriété**. $\forall (P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2,\ \deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$.
- **Propriété**. $\forall (P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2$,
$$\deg(P+Q) \leqslant \max(\deg(P), \deg(Q)).$$
- **Propriété**. Deux polynômes P et Q de $\mathbb{K}[X]$ sont associés SSI il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $Q = \lambda P$.

  ET Conséquence : deux polynômes associés ont même degré.
- **Propriété**. $\mathbb{K}[X]^* = \mathbb{K}^*$ (l'anneau $\mathbb{K}[X]$ est commutatif et intègre, mais ce n'est pas un corps).
- **Propriété**. L'anneau $(\mathbb{K}[X], +, \times)$ est intègre.
- **Lemme**. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $P \neq \tilde{0}$. Il existe un unique polynôme unitaire associé à P.
- **Lemme**. Pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$, le reste dans la division euclidienne du polynôme P par le polynôme $(X - \alpha)$ est le polynôme constant $\widetilde{P}(\alpha)$.

  ET Conséquence : α est racine de P SSI $(X - \alpha)$ divise P.