

**COLLE 21 – QUESTIONS DE COURS**

**QUESTION DE COURS 1. — Théorème.** Soient  $P \in \mathbb{K}[X]$ ,  $\alpha \in \mathbb{K}$  et  $m \in \mathbb{N}^*$ . Le scalaire  $\alpha$  est racine de  $P$  de multiplicité au moins  $m$  SSI  $P(\alpha) = P'(\alpha) = \dots = P^{(m-1)}(\alpha) = 0$ .

PREUVE.

► **Sens direct.** Supposons que  $\alpha$  est racine de  $P$  de multiplicité au moins  $m$ . Il existe alors un polynôme  $Q$  tel que :  $P = (X - \alpha)^m Q$ .

Soit alors  $k$  un entier quelconque de  $\llbracket 0, m-1 \rrbracket$ . On a (via la formule de Leibniz) :

$$P^{(k)} = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} [(X - \alpha)^m]^{(i)} Q^{(k-i)} = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \frac{m!}{(m-i)!} (X - \alpha)^{m-i} Q^{(k-i)}$$

En évaluant en  $\alpha$  cette relation, on obtient :  $P^{(k)}(\alpha) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \frac{m!}{(m-i)!} \underbrace{Q^{(k-i)}(\alpha)}_{=0 \text{ car } i < m}$  d'où  $P^{(k)}(\alpha) = 0$ .

On a ainsi établi l'implication :  $[\alpha \text{ est racine de } P \text{ de multiplicité au moins } m] \implies [\forall k \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket, P^{(k)}(\alpha) = 0]$ .

► **Réciproque.** Supposons que :  $\forall k \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket, P^{(k)}(\alpha) = 0$ .

D'après la formule de Taylor, on peut écrire :  $P = \underbrace{\sum_{k=0}^{m-1} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (X - \alpha)^k}_{\text{nulle par hypothèse}} + \sum_{k=m}^{\deg(P)} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (X - \alpha)^k$ .

Par suite :  $P = \sum_{k=m}^{\deg(P)} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (X - \alpha)^k$  c'ad :  $P = (X - \alpha)^m \sum_{k=m}^{\deg(P)} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (X - \alpha)^{\overbrace{k-m}^{\geq 0}}$ .

Il s'ensuit que  $(X - \alpha)^m \mid P$ , ce qui signifie que  $\alpha$  est racine de multiplicité au moins égale à  $m$  de  $P$ .

**Conclusion.**  $[\alpha \text{ est racine de } P \text{ de multiplicité au moins } m] \iff [\forall k \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket, P^{(k)}(\alpha) = 0]$

**QUESTION DE COURS 2. — Théorème (nombre maximal de racines d'un polynôme) :** si  $P \in \mathbb{K}_n[X]$  admet  $(n+1)$  racines distinctes, alors  $P = \tilde{0}$

**ET Corollaire (principe du prolongement algébrique) :** soient  $P$  et  $Q$  dans  $\mathbb{K}_n[X]$ . S'il existe  $(n+1)$  scalaires (c'ad des éléments de  $\mathbb{K}$ )  $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n+1}$  distincts tels que :  $\forall i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket, P(\alpha_i) = Q(\alpha_i)$ , alors  $P = Q$ .

PREUVE DU THÉORÈME. Soit  $P$  un polynôme de  $\mathbb{K}_n[X]$ , avec  $n \in \mathbb{N}$ . Supposons que  $P$  possède  $(n+1)$  racines 2 à 2 distinctes  $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}$ . Alors  $P$  est divisible par  $\prod_{i=1}^{n+1} (X - \alpha_i)$ . Il existe donc un polynôme  $Q$  tel que :  $P =$

$$Q \times \prod_{i=1}^{n+1} (X - \alpha_i).$$

Si  $Q$  est non nul, alors :  $\deg \left( Q \times \prod_{i=1}^{n+1} (X - \alpha_i) \right) \geq n+1$ , et par suite :  $\deg \left( Q \times \prod_{i=1}^{n+1} (X - \alpha_i) \right) > \deg(P)$ . Contradiction.

Il s'ensuit que  $Q$  est nul, ce qui implique que  $P$  l'est.

**Conclusion.** Si  $P \in \mathbb{K}_n[X]$  admet  $(n+1)$  racines 2 à 2 distinctes, alors  $P = \tilde{0}$ .

PREUVE DU COROLLAIRE. Soient  $P$  et  $Q$  dans  $\mathbb{K}_n[X]$ . Supposons qu'il existe  $(n+1)$  scalaires  $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n+1}$  2 à 2 distincts tels que :  $\forall i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket, P(\alpha_i) = Q(\alpha_i)$ .

On pose judicieusement :  $R = P - Q$ . Le polynôme  $R$  est de degré au plus  $n$  (puisque  $P$  et  $Q$  le sont), et possède  $(n+1)$  racines 2 à 2 distinctes par hypothèse. D'après le théorème précédent,  $R = 0$ , d'où  $P = Q$ .

**Conclusion.** Soient  $P$  et  $Q$  dans  $\mathbb{K}_n[X]$ . S'il existe  $(n+1)$  scalaires  $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n+1}$  deux à deux distincts tels que :  $\forall i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket, P(\alpha_i) = Q(\alpha_i)$ , alors  $P = Q$ .

**QUESTION DE COURS 3.** — **Formule de Taylor dans  $\mathbb{K}[X]$  (en  $\alpha$ ) :** soit  $P \in \mathbb{K}[X]$  non nul, et soit  $\alpha \in \mathbb{K}$ . Alors :

$$P(X) = \sum_{k=0}^{\deg(P)} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (X - \alpha)^k$$

PREUVE. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  notons :  $A(n)$  : “pour  $P \in \mathbb{K}[X]$  de degré  $n$ ,  $P = \sum_{k=0}^{\deg(P)} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (X - \alpha)^k$ ,”

► **Initialisation** ( $n = 0$ ) : pour un polynôme de degré 0, càd constant (non nul), on a  $P = P(\alpha)$  pour tout scalaire  $\alpha$ , ce qui établit l’initialisation.

► **Hérédité** : supposons la propriété vraie au rang  $n$  pour un certain entier naturel  $n$ . Soit  $P$  un polynôme de degré  $n + 1$ . Alors  $P'$  étant de degré  $n$ , on peut utiliser l’hypothèse de récurrence pour écrire :

$$P' = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (X - \alpha)^k \text{ soit : } P' = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k+1)}(\alpha)}{k!} (X - \alpha)^k$$

On en déduit (par intégration formelle) :

$$\exists \lambda \in \mathbb{K}, P = \lambda + \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k+1)}(\alpha)}{(k+1)!} (X - \alpha)^{k+1}$$

Puis, par changement d’indice dans la somme :

$$\exists \lambda \in \mathbb{K}, P = \lambda + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (X - \alpha)^k$$

Il reste à observer que  $P(\alpha) = \lambda$  (en évaluant en  $\alpha$  l’égalité précédente) pour obtenir :

$$P = P(\alpha) + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (X - \alpha)^k \quad \text{puis} \quad P = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (X - \alpha)^k$$

La dernière égalité obtenue signifie que la propriété  $A(n + 1)$  est vraie, ce qui prouve l’hérédité et achève cette récurrence.

**Conclusion** :  $\forall P \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}, \forall \alpha \in \mathbb{K}, P = \sum_{k=0}^{\deg(P)} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (X - \alpha)^k$

**QUESTION DE COURS 4.** — **Propriété.** Dans  $\mathbb{K}[X]$  les polynômes de degré 1 sont irréductibles.

PREUVE. Soit  $P \in \mathbb{K}[X]$ , avec  $\deg(P) = 1$ , et soit  $D$  un diviseur de  $P$ . Il existe alors  $Q \in \mathbb{K}[X]$  tel que  $DQ = P$ . En comparant les degrés des deux termes de cette égalité, on obtient  $\deg(D) = 0$  ou  $\deg(D) = 1$ .

Si  $\deg(D) = 0$ , alors  $D$  est un polynôme constant non nul :  $\exists \lambda \in \mathbb{K}^*, D = \lambda$  (et  $D$  est donc associé à 1).

Et lorsque  $\deg(D) = 1$ , on a  $\deg(Q) = 0$ , donc  $\exists \lambda \in \mathbb{K}^*, Q = \lambda$ , d’où  $D = (1/\lambda)P$  (et  $D$  est donc associé à  $P$ ).

En résumé, les diviseurs associés à  $P$  sont les polynômes associés à 1, et ceux associés à  $P$ . Donc  $P$  est irréductible dans  $\mathbb{K}[X]$ . **Conclusion.** Tout polynôme de degré 1 est irréductible dans  $\mathbb{K}[X]$  (pour tout corps  $\mathbb{K}$ ).

**QUESTION DE COURS 5.** — **Théorème.** Les polynômes irréductibles de  $\mathbb{C}[X]$  sont exactement ceux de degré 1.

PREUVE. Tout polynôme de degré 1 est irréductible dans  $\mathbb{K}[X]$  (pour tout corps  $\mathbb{K}$ ).

Montrons que la réciproque est vraie dans  $\mathbb{C}[X]$ , càd que tout polynôme irréductible à coefficients complexes est de degré 1. Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$  un polynôme irréductible. Par définition,  $P$  est non constant, et donc  $\deg(P) \geq 1$ . Raisonnons par l’absurde et supposons que  $\deg(P) \geq 2$ . D’après le théorème de d’Alembert-Gauss,  $P$  admet (au moins) une racine dans  $\mathbb{C}$ ; notons la  $\alpha$ . Alors  $Q = (X - \alpha)$  est un diviseur de  $P$  dans  $\mathbb{C}[X]$ , qui n’est associé ni à 1, ni à  $P$  (puisque  $\deg(Q) \neq 0$  et  $\neq \deg(P)$ ) : contradiction.

Il s’ensuit que tout polynôme irréductible de  $\mathbb{C}[X]$  est de degré 1.

**Conclusion.** Les polynômes irréductibles de  $\mathbb{C}[X]$  sont exactement ceux de degré 1.

**QUESTION DE COURS 6.** — “**Demi-Théorème**” (une seule implication). Dans  $\mathbb{R}[X]$ , si un polynôme est irréductible, alors il est de degré 1, ou de degré 2 sans racine réelle.

PREUVE. Montrons que tout polynôme irréductible dans  $\mathbb{R}[X]$  est de l’une des deux formes indiquées dans l’énoncé. Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  un polynôme irréductible. Par définition  $\deg(P) \geq 1$ .

Supposons que  $P$  soit de degré 2, avec un discriminant positif ou nul. Alors  $P$  admet (au moins) une racine dans  $\mathbb{R}$ ; notons-la  $z_0$ . Comme  $z_0 \in \mathbb{R}$ , alors  $Q = (X - z_0)$  est un diviseur de  $P$  dans  $\mathbb{R}[X]$ , qui n’est associé ni à 1 ( $Q$  étant non constant), ni à  $P$  (puisque  $\deg(P) \neq 1$ ) : contradiction.

Il s’ensuit que si  $P$  (irréductible) est de degré 2, alors son discriminant est strictement négatif.

Pour finir, envisageons le cas où  $\deg(P) \geq 3$ . D’après le théorème de d’Alembert-Gauss\*,  $P$  admet (au moins) une racine dans  $\mathbb{C}$ ; notons-la  $z_0$ .

☞ Si  $z_0 \in \mathbb{R}$  : alors  $Q = (X - z_0)$  est un diviseur de  $P$  dans  $\mathbb{R}[X]$ , qui n’est associé ni à 1 ( $Q$  étant non constant), ni à  $P$  (puisque  $\deg(P) \neq 1$ ) : contradiction.

☞ Si  $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ , alors  $\bar{z}_0$  est également racine de  $P$ . Les complexes  $z_0$  et  $\bar{z}_0$  étant distincts, le polynôme  $Q = (X - z_0)(X - \bar{z}_0)$ , (càd :  $Q = X^2 - 2\operatorname{Re}(z_0)X + |z_0|^2$ ) divise  $P$  dans  $\mathbb{C}[X]$  (a priori).

Il existe donc un polynôme  $R \in \mathbb{C}[X]$  tel que :  $P = QR$ . On a alors :  $\bar{P} = \bar{Q}\bar{R}$ , et puisque  $P$  et  $Q$  sont à coefficients réels :  $P = Q\bar{R}$ . On en déduit que  $R = \bar{R}$ ,<sup>†</sup> d’où  $R \in \mathbb{R}[X]$ . Ainsi  $Q$  divise  $P$  dans  $\mathbb{R}[X]$ ; or  $Q$  étant de degré 2, il n’est associé ni à 1, ni à  $P$  : donc  $P$  n’est pas irréductible, contradiction.

**Conclusion.** Dans  $\mathbb{R}[X]$  :  $[P \text{ irréductible}] \implies \begin{cases} \deg(P) = 1 \\ \text{ou} \\ \deg(P) = 2 \text{ et } \Delta < 0 \end{cases}$

\*. Qu’il est légitime d’appliquer au polynôme  $P$ , que l’on peut voir comme élément de  $\mathbb{C}[X]$ , car  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ .

†. Puisque  $Q(R - \bar{R}) = 0$ ,  $Q$  est non nul, et  $\mathbb{C}[X]$  est un anneau intègre.

## BANQUE D'EXERCICES

**EXERCICE 1.** — (**Tchebychev 1**). On définit une suite de polynômes  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  en posant

$$T_0 = 1, \quad T_1 = X, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$$

Etablir que :  $\forall n \in \mathbb{N}, \deg(T_n) = n$

**EXERCICE 2.** — (**Tchebychev 2**). On définit une suite de polynômes  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  en posant

$$T_0 = 1, \quad T_1 = X, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$$

Etablir que :  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall \theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$

**EXERCICE 3.** — (**Polynômes interpolateurs de Lagrange**). Soit  $n$  un entier naturel non nul, soient  $(n+1)$  réels deux à deux distincts  $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ , et soit  $(\beta_0, \dots, \beta_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ .

Pour tout  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , on pose : 
$$L_i = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{X - \alpha_j}{\alpha_i - \alpha_j}$$

Montrer que  $P = \sum_{i=0}^n \beta_i L_i$  est l'unique polynôme  $P \in \mathbb{R}_n[X]$  tel que  $P(\alpha_k) = \beta_k$  pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ .

**EXERCICE 4.** — Déterminer la valeur de  $m$  pour que 1 soit racine double<sup>‡</sup> du polynôme  $P_m = X^3 - 3X + m$ .

**EXERCICE 5.** — Déterminer les décompositions en polynômes irréductibles de  $P = X^6 - 1$ , dans  $\mathbb{C}[X]$  et dans  $\mathbb{R}[X]$ .

**EXERCICE 6.** — Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Déterminer les décompositions en polynômes irréductibles de  $P = X^{2n} - 1$ , dans  $\mathbb{C}[X]$  et dans  $\mathbb{R}[X]$ .

‡. C-à-d de multiplicité exactement 2.

## BANQUE D'EXERCICES - CORRIGÉS

**EXERCICE 1.** — (**Tchebychev 1**). On définit une suite de polynômes  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  en posant

$$T_0 = 1, \quad T_1 = X, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$$

Etablir que :  $\forall n \in \mathbb{N}, \deg(T_n) = n$

Notons pour tout  $n$  entier naturel :  $P(n)$  : “ $\deg(T_n) = n$ ”

► **Initialisation** (pour  $n = 0$  et  $n = 1$ ) : d’après l’énoncé  $\deg(T_0) = 0$  et  $\deg(T_1) = 1$ . Donc  $P(0)$  et  $P(1)$  sont vraies.

► **Hérédité** : supposons la propriété  $P(n)$  et  $P(n+1)$  vraies pour un certain entier naturel  $n$ .

On exploite alors la relation  $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$ .

Dans le terme de droite de cette égalité, le degré de  $2XT_{n+1}$  est par hypothèse de récurrence, égal à  $1 + (n+1) = n+2$ ; tandis que celui de  $T_n$  est égal à  $n$  (toujours par hypothèse de récurrence).

Puisque  $\deg(2XT_{n+1}) > \deg(T_n)$ , on en déduit que :  $\deg(2XT_{n+1} - T_n) = \deg(2XT_{n+1}) = n+2$ .

D’où  $P(n+2)$  est vraie. Récurrence établie.

**Conclusion.**  $\forall n \in \mathbb{N}, \deg(T_n) = n$

**EXERCICE 2.** — (**Tchebychev 2**). On définit une suite de polynômes  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  en posant

$$T_0 = 1, \quad T_1 = X, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$$

Etablir que :  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall \theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$

Notons  $P(n)$  : “ $\forall \theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$ ” pour tout entier naturel  $n$ .

► **Initialisation** (pour  $n = 0$  et  $n = 1$ ). Soit  $\theta$  un réel. d’une part  $T_0 = 1$  d’où :  $T_0(\cos(\theta)) = 1$ . D’autre part :  $\cos(0 \times \theta) = 1$ . Donc  $P(0)$  est vraie.

D’une part  $T_1 = X$  d’où :  $T_1(\cos(\theta)) = \cos(\theta)$ . D’autre part :  $\cos(1 \times \theta) = \cos(\theta)$ . Donc  $P(1)$  est vraie.

► **Hérédité.** Supposons  $P(n)$  et  $P(n+1)$  vraies pour un certain entier naturel  $n$ . Alors pour tout réel  $\theta$  :

$$\begin{aligned} T_{n+2}(\cos(\theta)) &= 2 \cos(\theta) \underbrace{T_{n+1}(\cos(\theta))}_{=_{HR} \cos((n+1)\theta)} - \underbrace{T_n(\cos(\theta))}_{=_{HR} \cos(n\theta)} \\ &= 2 \cos(\theta) \cos((n+1)\theta) - \cos(n\theta) \\ &= \cos((n+2)\theta) + \cos(n\theta) - \cos(n\theta) \text{ d'où : } T_{n+2}(\cos(\theta)) = \cos((n+2)\theta) \end{aligned}$$

D’où  $P(n+2)$  est vraie. Récurrence établie.

**Conclusion.**  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall \theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$

**EXERCICE 3.** — (**Polynômes interpolateurs de Lagrange**). Soit  $n$  un entier naturel non nul, soient  $(n+1)$  réels deux à deux distincts  $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ , et soit  $(\beta_0, \dots, \beta_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ .

Pour tout  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , on pose :  $L_i = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{X - \alpha_j}{\alpha_i - \alpha_j}$

Montrer que  $P = \sum_{i=0}^n \beta_i L_i$  est l’unique polynôme  $P \in \mathbb{R}_n[X]$  tel que  $P(\alpha_k) = \beta_k$  pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ .

Commençons par observer que par construction les polynômes  $L_k$  sont de degré exactement  $n$ , et :

$$\forall (i, k) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2, L_k(\alpha_i) = \delta_{ik}$$

Posons :  $P = \sum_{k=0}^n \beta_k L_k$ . Le polynôme  $P$  est de degré au plus  $n$ , en tant que combinaison linéaire de polynômes de degré  $n$ .

En outre :  $\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(\alpha_j) = \sum_{k=0}^n \beta_k L_k(\alpha_j) = \sum_{k=0}^n \beta_k \delta_{kj} = \beta_j$

Le polynôme  $P \in \mathbb{R}_n[X]$  répond donc à la question.

**Montrons son unicité.** Supposons qu'il existe un polynôme  $Q$  de  $\mathbb{R}_n[X]$  répondant à la question, alors  $P$  et  $Q$  sont deux polynômes de  $\mathbb{R}_n[X]$  qui coïncident en  $(n+1)$  points : d'après le principe du prolongement algébrique, ils sont égaux.

Ce qui prouve l'unicité du polynôme  $P \in \mathbb{R}_n[X]$  tel que  $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $P(\alpha_k) = \beta_k$ .

**Conclusion.** Pour tout  $(\beta_0, \dots, \beta_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ , il existe un unique polynôme  $P \in \mathbb{R}_n[X]$  tel que  $P(\alpha_k) = \beta_k$  pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$

**EXERCICE 4.** — Déterminer la valeur de  $m \in \mathbb{R}$  pour que 1 soit racine double (càd de multiplicité exactement 2) du polynôme  $P_m = X^3 - 3X + m$ .

1 est racine double de  $P_m = X^3 - 3X + m$  SSI  $P_m(1) = P'_m(1) = 0$  et  $P''_m(1) \neq 0$ .

Or :  $P_m(1) = -2 + m$ ,  $P'_m(1) = 0$  et  $P''_m(1) = 6$ .

**Conclusion.** 1 est racine double de  $P_m = X^3 - 3X + m$  SSI  $m = 2$ .

**Remarque.** Lorsque  $m = 2$ , on a :  $P_m = X^3 - 3X + 2 = (X-1)^2(X+2)$ .

**EXERCICE 5.** — Déterminer les décompositions en polynômes irréductibles (DPI) de  $P = X^6 - 1$ , dans  $\mathbb{C}[X]$  et dans  $\mathbb{R}[X]$ .

Les racines de  $X^6 - 1$  sont les racines sixièmes de l'unité. Par suite :

$$X^6 - 1 = (X-1)(X+1)(X-j)(X-\bar{j})(X+j)(X+\bar{j}) \quad (\text{DPI dans } \mathbb{C}[X])$$

Pour obtenir la DPI de  $X^6 - 1$  dans  $\mathbb{R}[X]$ , on multiplie deux à deux les parenthèses faisant intervenir des racines complexes conjuguées :

$$X^6 - 1 = (X-1)(X+1)(X^2+X+1)(X^2-X+1) \quad (\text{DPI dans } \mathbb{R}[X])$$

**EXERCICE 6.** — Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Déterminer les décompositions en polynômes irréductibles de  $P = X^{2n} - 1$ , dans  $\mathbb{C}[X]$  et dans  $\mathbb{R}[X]$ .

Les racines de  $X^{2n} - 1$  sont exactement les racines  $2n$ -èmes de l'unité.

On en déduit que :

$$X^{2n} - 1 = \prod_{k=0}^{2n-1} (X - e^{ik\pi/n}) \quad (\text{DPI dans } \mathbb{C}[X])$$

Déterminons la décomposition en polynômes irréductibles de  $X^{2n} - 1$  dans  $\mathbb{R}[X]$ .

$$\text{Notons que : } X^{2n} - 1 = (X-1)(X+1) \prod_{k=1}^{n-1} (X - e^{ik\pi/n}) \prod_{k=n+1}^{2n-1} (X - e^{ik\pi/n}) \quad (\spadesuit)$$

$$\text{Observons que : } \prod_{k=n+1}^{2n-1} (X - e^{ik\pi/n}) \underbrace{=}_{K=2n-k} \prod_{K=n-1}^1 (X - e^{i(2n-K)\pi/n}) = \prod_{K=1}^{n-1} (X - e^{-iK\pi/n}) = \prod_{K=1}^{n-1} (X - \overline{e^{iK\pi/n}}) \quad (\clubsuit)$$

$$\text{D'après } (\spadesuit) \text{ et } (\clubsuit) : X^{2n} - 1 = (X-1)(X+1) \prod_{k=1}^{n-1} (X - e^{ik\pi/n}) (X - \overline{e^{ik\pi/n}})$$

Il reste à observer que pour tout  $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$  :

$$(X - e^{ik\pi/n}) (X - \overline{e^{ik\pi/n}}) = X^2 - 2\text{Re}(e^{ik\pi/n})X + |e^{ik\pi/n}|^2 = X^2 - 2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)X + 1$$

*Remarque.* Pour tout  $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ , le nombre  $e^{ik\pi/n}$  est un complexe non réel (il est dans  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ). Il s'ensuit que le polynôme  $X^2 - 2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)X + 1$  est irréductible dans  $\mathbb{R}[X]$ .

Finalement, la décomposition en irréductibles de  $X^{2n} - 1$  dans  $\mathbb{R}[X]$  est :

$$X^{2n} - 1 = (X-1)(X+1) \prod_{k=1}^{n-1} \left( X^2 - 2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)X + 1 \right)$$

## Compléments

**COMPLÉMENT 1. — Racines des polynômes de Tchebychev.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que  $T_n$  admet  $n$  racines simples, et que toutes ses racines sont dans l'intervalle  $[-1, 1]$ .

Soit  $n$  un entier,  $n \geq 1$ . On cherche les racines de  $T_n$  appartenant à l'intervalle  $[-1, 1]$ .

Considérons donc  $x$  un réel de cet intervalle tel que :  $T_n(x) = 0$ . Puisque  $x$  est compris entre  $-1$  et  $1$ , il existe un unique réel  $\theta$  dans  $[0, \pi]$  tel que  $x = \cos(\theta)$ . On a alors :

$$\begin{aligned} T_n(x) = 0 &\iff T_n(\cos(\theta)) = 0 \iff \cos(n\theta) = 0 \iff n\theta \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi} \iff \theta \equiv \frac{\pi}{2n} \pmod{\frac{\pi}{n}} \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{\pi}{2n} + k \frac{\pi}{n} \iff \exists k \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{(2k+1)\pi}{2n} \end{aligned}$$

Posons alors, pour tout  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ ,  $\theta_k = \frac{(2k+1)\pi}{2n}$ . Il est clair que les réels  $\theta_k$  sont  $n$  réels distincts de  $[0, \pi]$ . Puisque la restriction de la fonction  $\cos$  à l'intervalle  $[0, \pi]$  est injective, les réels  $(\cos(\theta_k))_{k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket}$  sont  $n$  réels distincts de l'intervalle  $[-1, 1]$ ; qui plus est, ce sont (par construction)  $n$  racines distinctes du polynôme  $T_n$ .

Puisqu'en outre  $T_n$  est de degré  $n$ ,  $T_n$  ne possède pas d'autre racine que les  $\cos(\theta_k)$  évoqués ci-dessus.

**Conclusion :** pour tout entier naturel  $n$  non nul, le polynôme  $T_n$  possède  $n$  racines simples, qui sont les réels :  $\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$  avec  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ .

**COMPLÉMENT 2. — Théorème (D'Alembert-Gauss).**

Tout polynôme non constant de  $\mathbb{C}[X]$  possède une racine dans  $\mathbb{C}$ .

*NB : cette preuve est hors-programme de colle, et hors-programme tout court, mais pas l'énoncé du théorème !*

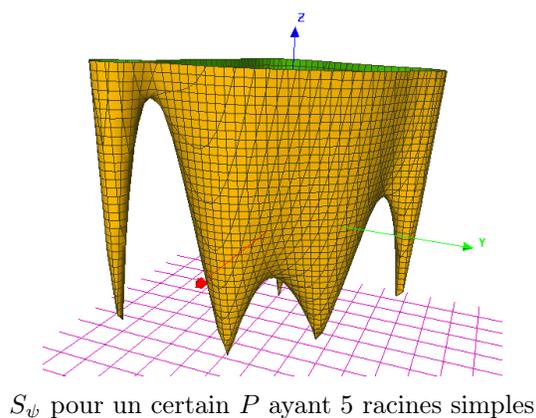
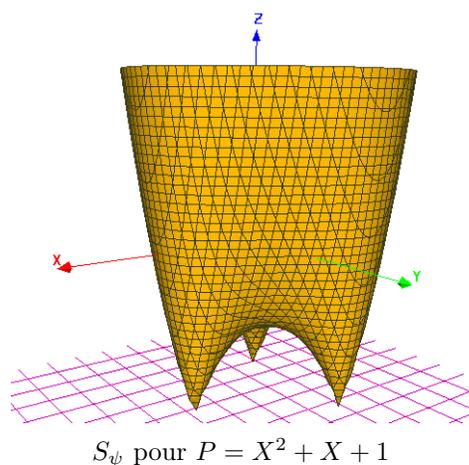
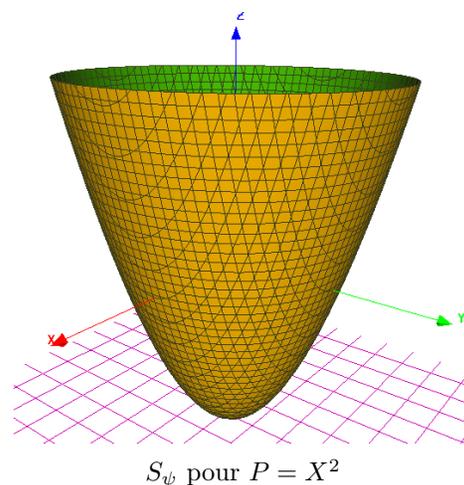
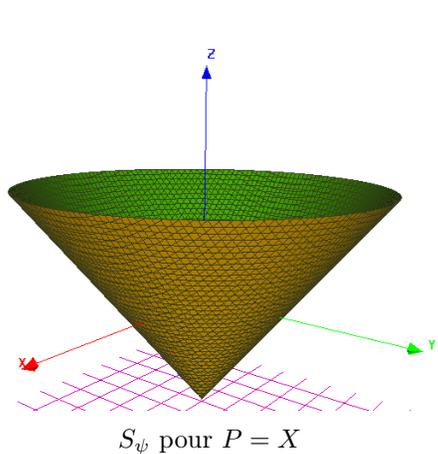
Soit  $P$  un polynôme de  $\mathbb{C}[X]$ , non constant. Notons  $n \in \mathbb{N}^*$  son degré, et  $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ .

Considérons l'application  $\psi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}_+$   
 $z \longmapsto |P(z)|$

Principe de la preuve : établir que la fonction  $\psi$  admet un minimum, puis que ce minimum est nul.

**Remarque.** Si vous voulez vous faire une image de  $\psi$ , il faut un peu d'imagination. Puisqu'elle est définie sur  $\mathbb{C}$ , et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ ,  $\psi$  ne sera plus représentée par une courbe, mais par une surface. Explicitement, l'image d'un complexe  $z = x + iy$  par  $\psi$  est le réel positif  $\psi(z)$ ; on se propose alors d'associer à ces données le point de  $\mathbb{R}^3$  de coordonnées  $(x, y, \psi(x + iy))$ . L'ensemble des points obtenus de cette façon en faisant varier  $x$  et  $y$  est une surface de  $\mathbb{R}^3$ , que l'on pourra alors appeler surface représentative de la fonction  $\psi$  (et que l'on notera  $S_\psi$  dans les exemples ci-dessous).

Ci-dessous, on donne quelques exemples de telles surfaces  $S_\psi$  associées à différents polynômes  $P$ .



► 1ère partie — Où l'on prouve que  $\psi$  admet un minimum.

Pour tout nombre complexe  $z$  non nul, on a :  $\psi(z) = |z^n| \left| a_n + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{z^{n-k}} \right|$

Soit  $k$  un entier de  $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$ . Lorsque  $|z|$  tend vers  $+\infty$ , on a :  $\frac{a_k}{z^{n-k}} \rightarrow 0$ .

Donc :  $\lim_{z \rightarrow +\infty} \left| a_n + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{z^{n-k}} \right| = |a_n|$

Puisque  $|a_n| > 0$  ( $a_n$  est non nul par hypothèse §), on a donc :  $\lim_{z \rightarrow +\infty} \psi(z) = +\infty$ .

En particulier, il existe un réel  $R > 0$  tel que :  $\forall z \in \mathbb{C}, (|z| > R) \implies (\psi(z) > |a_0| + 1)$  (♠). ¶

Posons alors  $K = D(0, R) = \{z \in \mathbb{C} / |z| \leq R\}$ .  $K$  est une partie fermée et bornée de  $\mathbb{C}$ . ¶ D'après le théorème des bornes atteintes\*\*,  $\psi$  admet un maximum et un minimum sur  $K$ .

Ne nous intéressons qu'au minimum de  $\psi$ , que l'on note  $m$ . Il existe un complexe  $z_0 \in D(0, R)$  tel que :  $\psi(z_0) = m$ .

Alors : (1) :  $\forall z \in D(0, R), \psi(z) \geq m$  puisque  $m$  est le minimum de  $\psi$  sur  $K$ .

En particulier :  $|a_0| \geq m$  puisque  $|a_0| = \psi(0)$ . Il s'ensuit que : (2)  $\forall z \in \mathbb{C}, (|z| > R) \implies (\psi(z) > m)$  d'après (♠).

On déduit des points (1) et (2) que :  $\forall z \in \mathbb{C}, \psi(z) \geq m = \psi(z_0)$  (♣).

Ainsi la fonction  $\psi$  admet un minimum (global) sur  $\mathbb{C}$ . Fin du premier acte.

► 2ème partie — Où l'on prouve que le minimum de  $\psi$  est nul.

Commençons par une observation pas trop difficile ; la fonction  $\psi$  étant à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$ , son minimum est supérieur ou égal à 0. Pour parvenir à nos fins, il "suffit" donc de prouver que  $m$  ne peut pas être strictement positif. Pour cela, rien de tel qu'un petit raisonnement par l'absurde.

Supposons que  $m = \psi(z_0) > 0$ . Alors la formule de Taylor appliquée en  $z_0$  donne :

$$P(z_0 + Z) = \alpha_0 + \alpha_1 Z + \alpha_2 Z^2 + \dots + \alpha_n Z^n$$

où les  $\alpha_i$  désignent les complexes  $\frac{P^{(i)}(z_0)}{i!}$ . En particulier :  $\alpha_0 = P(z_0) \neq 0$  (par hypothèse), et  $\alpha_n \neq 0$  puisque  $\deg(P) = n$ .

Notons alors :  $k = \min \{i \in \llbracket 1, n \rrbracket / \alpha_i \neq 0\}$ . L'existence de ce minimum est assurée par le fait que l'ensemble considéré est une partie de  $\mathbb{N}^*$  (donc minorée!) non vide ( $n$  y appartient). Avec cette définition de  $k$ , on a donc :

$$P(z_0 + Z) = \alpha_0 + \alpha_k Z^k + \alpha_{k+1} Z^{k+1} + \dots + \alpha_n Z^n$$

Notons encore  $\omega$  une racine  $k$ -ième du complexe  $-\frac{\alpha_0}{\alpha_k}$ .

Alors pour tout réel  $t$  :  $P(z_0 + \omega t) = \alpha_0 + \alpha_k \omega^k t^k + \alpha_{k+1} \omega^{k+1} t^{k+1} + \dots + \alpha_n \omega^n t^n$

d'où :  $P(z_0 + \omega t) = \alpha_0 - \alpha_0 t^k + \alpha_{k+1} \omega^{k+1} t^{k+1} + \dots + \alpha_n \omega^n t^n$  soit enfin :  $P(z_0 + \omega t) = \alpha_0(1 - t^k + o(t^k))$ .

D'où :  $\psi(z_0 + \omega t) = |\alpha_0| \times |(1 - t^k + o(t^k))|$ .

Pour  $t > 0$ , la quantité  $1 - t^k + o(t^k)$  est strictement plus petite que 1 (puisque alors l'expression  $t^k - o(t^k)$  est strictement positive) sur un voisinage de 0. En particulier, il existe un réel  $t_0$  tel que :  $\psi(z_0 + \omega t_0) < |\alpha_0|$ .

§. C'est le coefficient dominant de  $P$ .

¶. On utilise la définition de "tendre vers  $+\infty$ " pour une fonction définie sur  $\mathbb{C}$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , que voici : soit  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$  ;  $\lim_{z \rightarrow +\infty} f(z) = +\infty$  si pour tout réel  $M$ , il existe un réel  $R$  tel que :  $\forall z \in \mathbb{C}, (|z| > R) \implies (f(z) > M)$ .

La motivation pour choisir  $R = |a_0| + 1$  dans le cas présent est que  $\psi(0) = |a_0|$ , et que l'on est donc assuré qu'il existera un voisinage de 0 sur lequel  $\psi$  sera inférieure ou égale à  $|a_0| + 1$ , et donc que  $R \neq 0$ .

¶. Que  $K$  soit bornée, vous pouvez le comprendre. "Fermée", vous pouvez en avoir l'intuition :  $K$  est un disque fermé car "on en prend le bord". Vous verrez l'an prochain une définition vraiment mathématique de ce terme.

\*\*.

Qui affirmera que toute fonction continue  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  définie sur une partie fermée et bornée de  $\mathbb{C}$  est elle-même bornée et atteint ses bornes. Ici, la fonction  $\psi$  est continue en tant que composée d'une fonction polynomiale, et de la fonction valeur absolue, toutes deux continues.

En posant  $z_1 = z_0 + \omega t_0$  et en se rappelant que  $\alpha_0 = P(z_0) = m$ , on a donc établi que :

$$\exists z_1 \in \mathbb{C}, \psi(z_1) < \psi(z_0)$$

ce qui contredit violemment le fait que  $\psi(z_0)$  est le minimum global de  $\psi$ .

Il s'ensuit que  $m = \psi(z_0) = 0$ , ce qui prouve que  $\psi$  s'annule au moins une fois dans  $\mathbb{C}$ , et donc que  $P$  s'annule au moins une fois dans  $\mathbb{C}$ .

**Conclusion.** Tout polynôme non constant de  $\mathbb{C}[X]$  possède une racine dans  $\mathbb{C}$ .