# Exercices 20 — Espaces vectoriels et applications linéaires

## Stabilité par somme, et par multiplication par un scalaire

**Exercice 1.** — Déterminer si chacune des parties suivantes est stable par somme, et par multiplication par un scalaire.

1/ L'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 3.

Soient $P$ et $Q$ deux polynômes de degré $\leqslant 3$.

Puisque $\deg(P+Q) \leqslant \max(\deg(P), \deg(Q))$, on a : $\deg(P+Q) \leqslant 3$.

Donc l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 3 est **stable par somme**.

Par ailleurs, si $\lambda$ désigne un scalaire quelconque, alors : $\deg(\lambda P) = \deg(P)$ si $\lambda \neq 0$, et $\deg(\lambda P) = -\infty$ si $\lambda = 0$.

Dans les deux cas, si $P$ est de degré $\leqslant 3$, alors $\deg(\lambda P) \leqslant 3$.

Donc l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 3 est **stable par multiplication par un scalaire**.

2/ L'ensemble des polynômes de degré pair.

L'exemple donné en illustration donne la réponse à cette question : les polynômes $P = X^2 + X$ et $Q = -X^2$ sont de degré pair, mais leur somme $P + Q = X$ ne l'est pas.

Donc l'ensemble des polynômes de degré pair **n'est pas stable par somme**.

Par ailleurs le polynôme $P = X^4$ est de degré pair, mais $0 \times P$ ne l'est pas (son degré est $-\infty$).
Donc l'ensemble des polynômes de degré pair **n'est pas stable par multiplication par un scalaire**.

3/ L'ensemble des polynômes admettant 2 et 3 comme racines.

Soient $P$ et $Q$ deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ qui admettant 2 et 3 comme racines.

Alors :

$$(P+Q)(2) = P(2) + Q(2) \text{ d'où : } (P+Q)(2) = 0 \text{ puisque } P(2) = Q(2) = 0 \text{ par hypothèse.}$$

De même : $(P+Q)(3) = 0$ puisque $P(3) = Q(3) = 0$ par hypothèse.

Donc $P + Q$ est un polynôme admettant 2 et 3 comme racines.

Donc l'ensemble des polynômes admettant 2 et 3 comme racines est **stable par somme**.

Par ailleurs si $P$ admet 2 et 3 comme racines, alors pour tout scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ on a :

$$(\lambda P)(2) = \lambda P(2) = 0 \qquad \text{et} \qquad (\lambda P)(3) = \lambda P(3) = 0$$

Donc $\lambda P$ est un polynôme admettant 2 et 3 comme racines.

Donc l'ensemble des polynômes admettant 2 et 3 comme racines **est stable par multiplication par un scalaire**.

4/ Les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ représentant une fonction croissante sur $\mathbb{R}$.

Soient $P$ et $Q$ deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$ représentant deux fonctions croissantes sur $\mathbb{R}$.

Alors $P+Q$ est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ représentant une fonction croissante sur $\mathbb{R}$, car la somme de deux fonctions croissantes sur $\mathbb{R}$ l'est également.

Donc l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ représentant une fonction croissante sur $\mathbb{R}$ **est stable par somme**.

En revanche, le polynôme $P = X^3$ représente une fonction croissante sur $\mathbb{R}$ ; mais $(-1) \times P = -X^3$ est un polynôme représentant une fonction décroissante sur $\mathbb{R}$

Donc l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ représentant une fonction croissante sur $\mathbb{R}$ **n'est pas stable par multiplication par un scalaire**.

5/ L'ensemble des polynômes irréductibles dans $\mathbb{K}[X]$.

Les polynômes $P = X$ et $Q = -X+1$ sont irréductibles dans $\mathbb{K}[X]$ (ce sont des polynômes de degré 1).

Mais $P+Q = 1$ n'est pas irréductible dans $\mathbb{K}[X]$ (puisque par définition, un polynôme irréductible est non constant).

Donc l'ensemble des polynômes irréductibles dans $\mathbb{K}[X]$ **n'est pas stable par somme**.

Par ailleurs $P = X$ est irréductible dans $\mathbb{K}[X]$, mais $0 \times P$ ne l'est pas.

Donc l'ensemble des polynômes irréductibles dans $\mathbb{K}[X]$ **n'est pas stable par multiplication par un scalaire**.

6/ L'ensemble des polynômes admettant 1 comme racine de multiplicité au moins 4.

Soient $P$ et $Q$ deux polynômes admettant 1 comme racine de multiplicité au moins 4.

Ceci signifie, par définition que $(X-1)^4$ divise $P$ et $Q$.

Donc : $(X-1)^4$ divise $P+Q$. Ce qui signifie que $P+Q$ admet 1 comme racine de multiplicité au moins 4.

Donc l'ensemble des polynômes admettant 1 comme racine de multiplicité au moins 4 **est stable par somme**.

Par ailleurs, si $(X-1)^4$ divise $P$, alors $(X-1)^4$ divise $\lambda P$ pour tout scalaire $\lambda$.

Donc l'ensemble des polynômes admettant 1 comme racine de multiplicité au moins 4 **est stable par multiplication par un scalaire**.

**Exercice 2.** — Dans chacun des cas suivants, $F$ désigne une partie de $\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ : on demande de déterminer si $F$ est stable par somme, et/ou stable par multiplication par un scalaire.

1/ $F = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

D'après les théorèmes généraux, si $f$ et $g$ sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, alors $f+g$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Donc l'ensemble $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ **est stable par somme**.

D'après les théorèmes généraux, si $f$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et $\lambda$ est un réel, alors $\lambda f$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Donc l'ensemble $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ **est stable par multiplication par un scalaire**.

2/ $F = \{f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant 0\}$ ($F$ désigne ici l'ensemble des fonctions continues et positives sur $\mathbb{R}$).

Si $f$ et $g$ appartiennent à $F$, alors $f+g$ est une fonction continue (car $f$ et $g$ le sont) et positive (car $f$ et $g$ le sont) sur $\mathbb{R}$ ; donc $f+g$ appartient à $F$.

Donc l'ensemble $F$ **est stable par somme**.

La fonction exp appartient à $F$, mais la fonction $(-1)\times\exp$ n'y appartient pas.

Donc l'ensemble $F$ **n'est pas stable par multiplication par un scalaire**.

3/ $F = \left\{f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0\right\}$ ($F$ désigne ici l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, et d'intégrale nulle sur $[0,1]$).

Soient $f$ et $g$ deux fonctions de $F$. Alors $f+g$ est continue sur $\mathbb{R}$ (car $f$ et $g$ le sont) et :

$$\int_0^1 (f+g)(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)+g(x)\,\mathrm{d}x = \underbrace{\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x}_{=0 \text{ car } f\in F} + \underbrace{\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x}_{=0 \text{ car } g\in F} = 0$$

(la première égalité provenant de la définition de $f+g$, la seconde de la linéarité de l'intégrale, et la dernière de l'hypothèse suivant laquelle $f$ et $g$ appartiennent à $F$).

En résumé : $(f+g) \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $\displaystyle\int_0^1 (f+g)(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Donc : $(f+g) \in F$.

Donc l'ensemble $F$ **est stable par somme**.

Soient $f$ une fonction de $F$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $\lambda f$ est continue sur $\mathbb{R}$ (car $f$ l'est) et :

$$\int_0^1 (\lambda f)(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \lambda f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \underbrace{\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x}_{=0 \text{ car } f\in F} = 0$$

(la première égalité provenant de la définition de $\lambda f$, la seconde de la linéarité de l'intégrale, et la dernière de l'hypothèse suivant laquelle $f$ appartient à $F$).

En résumé : $(\lambda f) \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $\displaystyle\int_0^1 (\lambda f)(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Donc : $(\lambda f) \in F$.

Donc l'ensemble $F$ **est stable par multiplication par un scalaire**.

4/ $F = \{f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ f'' - 3f' + 2f = 0\}$ ($F$ désigne ici l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, solutions de l'équation différentielle $y'' - 3y' + 2y = 0$).

Soient $f$ et $g$ deux fonctions de $F$. Alors $(f+g)$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ (car $f$ et $g$ le sont).

En outre, par linéarité de la dérivation :

$$(f+g)'' - 3(f+g)' + 2(f+g) = f'' + g'' - 3f' - 3g' + 2f + 2g$$

Donc :

$$(f+g)'' - 3(f+g)' + 2(f+g) = \underbrace{f'' - 3f' + 2f}_{=0 \text{ car } f\in F} + \underbrace{g'' - 3g' + 2g}_{=0 \text{ car } g\in F}$$

Finalement : $(f+g)'' - 3(f+g)' + 2(f+g) = 0$.

En résumé : $(f+g) \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $(f+g)'' - 3(f+g)' + 2(f+g) = 0$. Donc $(f+g) \in F$.

Donc l'ensemble $F$ **est stable par somme**.

Soient $f$ une fonction de $F$, et $\lambda$ un réel. Alors $(\lambda f)$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ (car $f$ l'est).

En outre, par linéarité de la dérivation :

$$(\lambda f)'' - 3(\lambda f)' + 2(\lambda f) = \lambda f'' - 3\lambda f' + 2\lambda f$$

Donc :

$$(\lambda f)'' - 3(\lambda f)' + 2(\lambda f) = \lambda \underbrace{(f'' - 3f' + 2f)}_{=0 \text{ car } f\in F}$$

Finalement : $(\lambda f)'' - 3(\lambda f)' + 2(\lambda f) = 0$.

En résumé : $(\lambda f) \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $(\lambda f)'' - 3(\lambda f)' + 2(\lambda f) = 0$. Donc $\lambda f \in F$.

Donc l'ensemble $F$ **est stable par multiplication par un scalaire**.

**Exercice 3.** — Dans chacun des cas suivants, $F$ désigne une partie de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ : on demande de déterminer si $F$ est stable par somme, et/ou stable par multiplication par un scalaire.

1/ $F = \mathrm{T}_2^+(\mathbb{R})$ (l'ensemble des matrices triangulaires supérieures de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$).

On a déjà établi cette année que la somme de deux matrices triangulaires supérieures l'est encore ; et il est immédiat que si $A$ est triangulaire supérieure, alors $\lambda A$ l'est aussi pour tout réel $\lambda$.

Donc : $\mathrm{T}_2^+(\mathbb{R})$ est **stable par somme et par multiplication par un scalaire**.

2/ $F = \mathrm{S}_2(\mathbb{R})$ (l'ensemble des matrices symétriques de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$).

Soient $A$ et $B$ dans $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, symétriques. Alors : ${}^tA = A$ et ${}^tB = B$.

Or : ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$ (par **linéarité de la transposition**).

Donc ${}^t(A+B) = A + B$. Donc $A + B$ est symétrique.

Donc : $\mathrm{S}_2(\mathbb{R})$ est **stable par somme**.

La linéarité de la transposition permet également de prouver que : $\mathrm{S}_2(\mathbb{R})$ est **stable par multiplication par un scalaire**.

3/ $F = \{M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}),\ \mathrm{tr}(M) = 0\}$ (l'ensemble des matrices de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ ayant une trace nulle).

Soient $A$ et $B$ dans $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, de trace nulle.

On a : $\mathrm{tr}(A+B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$ (par **linéarité de la trace**).

Donc $\mathrm{tr}(A+B) = 0$. Donc $A+B$ est de trace nulle.

Donc l'ensemble $F$ des matrices de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ de trace nulle est **stable par somme**.

La linéarité de la trace permet également de prouver que $F$ est **stable par multiplication par un scalaire**.

4/ $F = \{M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}),\ \det(M) = 0\}$ (l'ensemble des matrices de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ ayant un déterminant nul).

Les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ appartiennent à $F$.

Mais $A + B = \mathrm{I}_2$ n'appartient pas à $F$.
Donc l'ensemble $F$ des matrices de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ de déterminant nul n'est pas **stable par somme**.

En revanche, pour toute matrice $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ et pour tout réel $\lambda$ on a : $\det(\lambda A) = \lambda^2 \det(A)$.

Il s'ensuit que : $\det(A) = 0 \Longrightarrow \forall\, \lambda \in \mathbb{R},\ \det(\lambda A) = 0$.

On en déduit $F$ est **stable par multiplication par un scalaire**.

**Exercice 4.** — Dans chacun des cas suivants, $F$ désigne une partie de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ : on demande de déterminer si $F$ est stable par somme, et/ou stable par multiplication par un scalaire.

1/ $F$ : la partie de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ constituée des suites croissantes.

$F$ est clairement **stable par somme**.

En revanche, la suite de terme général $u_n = n$ est croissante, mais celle de terme général $-2u_n = -2n$ ne l'est pas.

Donc $F$ n'est pas **stable par multiplication par un scalaire**.

2/ $F$ : la partie de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ constituée des suites convergentes.

$F$ est clairement **stable par somme et par multiplication par un scalaire**.

3/ $F$ : la partie de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ constituée des suites convergentes et de limite égale à 1.

$F$ n'est clairement pas **stable par somme, ni par multiplication par un scalaire**.

4/ $F$ : la partie de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ constituée des suites périodiques de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.[*]

Si la suite $(u_n)$ est $N$-périodique, alors la suite $(\lambda u_n)$ est $N$-périodique pour tout scalaire $\lambda$.
Donc $F$ est **stable par multiplication par un scalaire**.

Si les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ sont $N$-périodiques et $M$-périodiques respectivement, alors la suite $(u_n + v_n)$ est $(N \vee M)$-périodique.
Donc $F$ est **stable par somme**.

[*]. On dit qu'une suite réelle $(u_n)$ est périodique s'il existe un entier naturel <u>non nul</u> $N$ tel que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+N} = u_n$.

Sous-espaces vectoriels

**Exercice 5. — (Sous-espaces vectoriels du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$)**
On pose $E = \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ (espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$). Les sous-ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $E$ ?

1/ $A = \{f \in E,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq 0\}$

La fonction exp appartient à $A$, mais $-\exp$ n'est pas dans $A$. Donc $A$ n'est pas stable par combinaison linéaire (ou par multiplication par un scalaire) ; la condition (SEV3) n'est pas satisfaite.

**Conclusion**. $A$ n'est pas un sev de $E$.

2/ $B = \mathscr{C}^3(\mathbb{R},\mathbb{R})$

Puisque toute fonction de classe $\mathscr{C}^3$ est en particulier continue, $B$ est une partie de $E$ (SEV1).

La fonction identiquement nulle est de classe $\mathscr{C}^3$ sur $\mathbb{R}$. Donc $0_E \in B$ (SEV2).

D'après les théorèmes généraux, $B$ est stable par combinaison linéaire (SEV3).

**Conclusion**. $B$ est un sev de $E$.

3/ $C = \{f \in E,\ f \text{ dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et } f'(1) = 0\}$

$C$ est contenu dans $E$ par définition (SEV1).

La fonction identiquement nulle sur $\mathbb{R}$ est trivialement dans $C$.

Si $f$ et $g$ sont dans $C$, alors pour tout couple de réels $(\lambda,\mu)$, la fonction $\lambda f + \mu g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ d'après les théorèmes généraux. En outre, par hypothèse et linéarité de la dérivation : $(\lambda f + \mu g)'(1) = 0$ (SEV3).

**Conclusion**. $C$ est un sev de $E$.

4/ $D = \{f \in E, \displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)dx = 0\}$

$D$ est contenu dans $E$ par définition (SEV1).

La fonction identiquement nulle sur $\mathbb{R}$ est trivialement dans $D$.

Si $f$ et $g$ sont dans $D$, alors pour tout couple de réels $(\lambda,\mu)$, la fonction $\lambda f + \mu g$ est continue sur $\mathbb{R}$ d'après les théorèmes généraux. En outre, par hypothèse et linéarité de l'intégrale : $\displaystyle\int_{-1}^{1} \lambda f + \mu g = 0$ (SEV3).

**Conclusion**. $D$ est un sev de $E$.

**Exercice 6. — (Sous-espaces vectoriels du $\mathbb{C}$-espace vectoriel des polynômes $\mathbb{C}[X]$)**
Les sous-ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $E = \mathbb{C}[X]$ ?

1/ L'ensemble $A$ des polynômes de degré $\leqslant 3$.

$A$ est contenu dans $E$ par définition (SEV1).

Le polynôme nul est trivialement dans $A$.

Si $P$ et $Q$ sont dans $A$, alors pour tout couple de complexes $(\lambda, \mu)$, on a : $\deg(\lambda P + \mu Q) \leqslant \max(\deg P, \deg Q) \leqslant 3$. Donc $\lambda P + \mu Q \in A$ (SEV3).

**Conclusion**. $A$ est un sev de $E$.

2/ L'ensemble $B$ des polynômes de degré exactement 3.

$\widetilde{0} \notin B$ (la condition SEV2 n'est pas satisfaite).

**Conclusion**. $B$ n'est pas un sev de $E$.

3/ L'ensemble $C$ des polynômes unitaires. †

$\widetilde{0} \notin C$ (la condition SEV2 n'est pas satisfaite).

**Conclusion**. $C$ n'est pas un sev de $E$.

4/ L'ensemble $D$ des polynômes $P$ à coefficients imaginaires purs.

$\mathrm{i}X \in D$ mais $\mathrm{i}(\mathrm{i}X) \notin D$. Donc $D$ n'est pas stable par combinaison linéaire (la condition (SEV3) n'est pas vérifiée).

**Conclusion**. $D$ n'est pas un sev de $E$.

**Exercice 7. — (Sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$)** Montrer que :

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; x + y - z = 0\} \text{ est un sev de } \mathbb{R}^3$$

$F \subset \mathbb{R}^3$ par définition (SEV1).

Le vecteur $\overrightarrow{0}_{\mathbb{R}^3}$ appartient évidemment à $F$ (SEV2).

Soient $\overrightarrow{u} = (x, y, z)$ et $\overrightarrow{v} = (x', y', z')$ deux vecteurs de $F$, et $\lambda$ et $\mu$ deux réels.

Alors : $\lambda \overrightarrow{u} + \mu \overrightarrow{v} = (\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z')$.

Or :

$$(\lambda x + \mu x') + (\lambda y + \mu y') - (\lambda z + \mu z') = \lambda \underbrace{(x + y - z)}_{=0} + \mu \underbrace{(x' + y' - z')}_{=0} = 0$$

Donc : $\lambda \overrightarrow{u} + \mu \overrightarrow{v} \in F$. Ce qui assure que $F$ est stable par combinaison linéaire (la condition SEV3 est satisfaite).

**Conclusion**. $F$ est un sev de $\mathbb{R}^3$.

†. Un polynôme est dit unitaire lorsque son coefficient dominant vaut 1.

**Exercice 8. — (Sous-espaces vectoriels).**(*) Montrer que l'ensemble des fonctions **à support borné** (*ie* nulles en-dehors d'un intervalle fermé borné) constitue un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Notons $F$ l'ensemble des fonctions à support borné. $F$ est contenu dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, et la fonction nulle est à support borné (SEV1 et 2). En outre, si $f$ et $g$ sont à support borné, il existe deux réels $M_1$ et $M_2$ tels que : $\text{supp}(f) \subset [-M_1, M_1]$ et $\text{supp}(g) \subset [-M_2, M_2]$. Alors pour tout couple de réels $(\lambda, \mu)$, on a : $\text{supp}(\lambda f + \mu g) \subset [-M_3, M_3]$ en ayant posé $M_3 = \max(M_1, M_2)$. Donc $\lambda f + \mu g$ est à support borné : SEV3 est satisfaite.

**Conclusion**. L'ensemble des fonctions **à support borné** (*ie* nulles en-dehors d'un intervalle fermé borné) constitue un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

**Exercice 9. — (Sous-espaces vectoriels).**(*) Soient $F$ et $G$ deux sev d'un même $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$.

Montrer que $F \cap G$ est un sev de $E$.

Preuve dans le pdf du cours.

**Exercice 10. — (Sous-espaces vectoriels).**(*) Soient $F$ et $G$ deux sev d'un même $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$.

Montrer que :

$$[F \cup G \text{ est un sev de } E] \iff [F \subset G \text{ ou } G \subset F]$$

Preuve dans le pdf du cours.

**Exercice 11. — (SEV).** Dans $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, on considère la partie $F$ contituée des matrices de déterminant nul.

$F$ est-il un sev de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ ?

$E_{11} \in F$, $E_{22} \in F$, mais $\mathrm{I}_2 = E_{11} + E_{22} \notin F$. Donc $F$ n'est pas stable par somme.

**Conclusion**. $F$ n'est pas un sev de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.

**Exercice 12. — (Commutant d'une matrice).** Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

On note $F$ le commutant de la matrice $A$, càd l'ensemble des matrices $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec $A$, soit encore :

$$F = \{M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}), \quad MA = AM\}$$

Montrer que $F$ est un sev de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

$F$ est une partie de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ par définition (SEV1) ; et il est clair que la matrice nulle $0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{K})}$ appartient à $F$ (SEV2).

Montrons la stabilité de $F$ par combinaison linéaire. Soient $M$ et $N$ deux matrices de $F$, $\lambda$ et $\mu$ deux scalaires.

On a :

$$(\lambda M + \mu N)A = \lambda MA + \mu NA = \lambda AM + \mu AN = A(\lambda M + \mu N)$$

(la première et la troisième égalité provenant de la distributivité du produit matriciel par rapport à la somme ; la seconde provenant de l'hypothèse suivant laquelle $M$ et $N$ commutent avec $A$).

On en déduit que $(\lambda M + \mu N) \in F$. Ce qui assure que $F$ est stable par combinaison linéaire (SEV3).

**Conclusion**. Le commutant de $A$, noté $F$ dans cet exo, est une partie de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ contenant $0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{K})}$ et stable par combinaison linéaire. A ce titre, $F$ est un sev de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

## Familles génératrices

**Exercice 13. — (Familles génératrices).** Montrer que l'ensemble $F = \{(a+2b, b, a-b) \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, et en déterminer une famille génératrice.

Soit $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$\overrightarrow{v} \in F \iff \exists\,(a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \overrightarrow{v} = (a+2b, b, a-b) \iff \exists\,(a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \overrightarrow{v} = a\,(1,0,1) + b\,(2,1,-1)$$

Ainsi : $\overrightarrow{v} \in F \iff \overrightarrow{v} \in \mathrm{Vect}\,((1,0,1), (2,1,-1))$.

**Conclusion**. $F = \mathrm{Vect}\,((1,0,1), (2,1,-1))$. En particulier, $F$ est un sev de $\mathbb{R}^3$.

Plus précisément, $F$ est le sev **engendré** par les vecteurs $\overrightarrow{u} = (1,0,1)$ et $\overrightarrow{w} = (2,1,-1)$. Puisque ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, on peut affirmer (et nous justifierons dans le prochain chapitre) que $F$ est un plan de $\mathbb{R}^3$ (sev de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2), le plan engendré par les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w}$.

**Exercice 14. — (Familles génératrices).** Montrer que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels et en déterminer une famille génératrice :

1/ $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x - 2y + 3z = 0\}$

Soit $\overrightarrow{v} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

On a : $\overrightarrow{v} \in F \iff x - 2y + 3z = 0 \iff x = 2y - 3z \iff \exists\,(y,z) \in \mathbb{R}^2,\ \overrightarrow{v} = (2y-3z, y, z)$

$$\iff \exists\,(y,z) \in \mathbb{R}^2,\ \overrightarrow{v} = a\,(2,1,0) + b\,(-3,0,1)$$

Ainsi : $\overrightarrow{v} \in F \iff \overrightarrow{v} \in \mathrm{Vect}\,((2,1,0), (-3,0,1))$.

**Conclusion**. $F = \mathrm{Vect}\,((2,1,0), (-3,0,1))$. En particulier, $F$ est un sev de $\mathbb{R}^3$.

Plus précisément, $F$ est le sev **engendré** par les vecteurs $\overrightarrow{u} = (2,1,0)$ et $\overrightarrow{w} = (-3,0,1)$.

2/ $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \,|\, P(0) = 0\}$

Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$. On a :

$$P \in F \iff \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ P = aX^3 + bX^2 + cX \iff P \in \mathrm{Vect}(X^3, X^2, X)$$

**Conclusion**. $F = \mathrm{Vect}\,(X^3, X^2, X)$. En particulier, $F$ est un sev de $\mathbb{R}_3[X]$.

Plus précisément, $F$ est le sev de $\mathbb{R}_3[X]$ engendré par $X$, $X^2$ et $X^3$.

3/ La partie $F$ de $\mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ constituées des solutions de l'équation différentielle : $\quad y'' - 4y = 0$

Soit $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

On a : $f \in F \iff \exists\,(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = \lambda \mathrm{e}^{2x} + \mu \mathrm{e}^{-2x}$

D'où : $f \in F \iff f \in \mathrm{Vect}(g,h)$ en ayant noté $g(x) = \mathrm{e}^{2x}$ et $h(x) = \mathrm{e}^{-2x}$.

**Conclusion**. $F = \mathrm{Vect}\,(g,h)$. En particulier, $F$ est un sev de $\mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Plus précisément, $F$ est le sev de $\mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ engendré par $g$ et $h$.

Puisque les deux fonctions $g$ et $h$ ne sont pas colinéaires (pas proportionnelles), on peut affirmer (et nous justifierons dans le prochain chapitre) que $F$ est un plan de $\mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ (sev de $\mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ de dimension 2), le plan engendré par les fonctions $g$ et $h$.

4/ La partie $F$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ constituée des suites $(u_n)$ telles que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_n$

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

On a : $(u_n) \in F \iff \exists\,(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda + \mu(-1)^n$.

D'où : $(u_n) \in F \iff (u_n) \in \mathrm{Vect}((v_n),(w_n))$ en ayant noté $v_n = 1$ et $w_n = (-1)^n$.

**Conclusion**. $F = \mathrm{Vect}\,((v_n),(w_n))$. En particulier, $F$ est un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Plus précisément, $F$ est le sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ engendré par $(v_n)$ et $(w_n)$.

Puisque les deux suites $(v_n)$ et $(w_n)$ ne sont pas colinéaires (pas proportionnelles), on peut affirmer que $F$ est un plan dans l'espace vectoriel des suites $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, le plan engendré par les suites $(v_n)$ et $(w_n)$.

5/ L'ensemble $F$ des matrices triangulaires supérieures de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.

Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.

On a : $M \in F \iff \exists(a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ M = aE_{11} + bE_{12} + cE_{22}$.

D'où : $M \in F \iff M \in \mathrm{Vect}\,(E_{11},E_{12},E_{22})$.

**Conclusion**. $F = \mathrm{Vect}\,(E_{11},E_{12},E_{22})$. En particulier, $F$ est un sev de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.

Plus précisément, $F$ est le sev de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ engendré par les matrices $E_{11}$, $E_{12}$, et $E_{22}$.

6/ L'ensemble $F$ des matrices de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ de trace nulle.

Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.

On a : $M \in F \iff \exists(a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ M = a(E_{11} - E_{22}) + bE_{12} + cE_{21}$.

D'où : $M \in F \iff M \in \mathrm{Vect}\,(E_{11} - E_{22},E_{12},E_{21})$.

**Conclusion**. $F = \mathrm{Vect}\,(E_{11} - E_{22},E_{12},E_{21})$. En particulier, $F$ est un sev de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.

Plus précisément, $F$ est le sev de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ engendré par les matrices $E_{11} - E_{22}$, $E_{12}$, $E_{21}$.

**Exercice 15.** — **(Familles génératrices)**. Dans $\mathbb{R}_3[X]$, on considère la partie $F$ constituée des polynômes $P$ tels que : $\displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

Montrer que $F$ est un sev de $\mathbb{R}_3[X]$, et en déterminer une famille génératrice.

Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$ : $\exists (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4,\ P = aX^3 + bX^2 + cX + d$.

On a : $P \in F \Longleftrightarrow \displaystyle\int_{-1}^{1} at^3 + bt^2 + ct + d\,\mathrm{d}t = 0 \Longleftrightarrow \int_{-1}^{1} bt^2 + d\,\mathrm{d}t = 0 \Longleftrightarrow 2\left[\frac{bt^3}{3} + dt\right]_0^1 = 0$

$$\Longleftrightarrow \frac{2b}{3} + 2d = 0 \Longleftrightarrow b = -3d$$

En résumé :

$P \in F \Longleftrightarrow \exists (a,c,d) \in \mathbb{R}^3,\ P = aX^3 - 3dX^2 + cX + d \Longleftrightarrow \exists (a,c,d) \in \mathbb{R}^3,\ P = aX^3 + d(1-3X^2) + cX$

Par suite :

$$P \in F \Longleftrightarrow P \in \mathrm{Vect}\left(X^3, 1-3X^2, X\right)$$

**Conclusion**. $F = \mathrm{Vect}\left(X^3, 1-3X^2, X\right)$. En particulier $F$ est un sev de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, le sev engendré par les polynômes $X^3$, $(1-3X^2)$ et $X$.

**Exercice 16.** — **(Familles génératrices)**. Déterminer une famille génératrice du sev de $\mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des fonctions $f$ telles que : $f'' = 2f' - 2f$.

Soit $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On a :

$$f \in F \Longleftrightarrow f'' - 2f' + 2f = 0 \Longleftrightarrow \exists (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \mathrm{e}^x\left(\lambda\cos(x) + \mu\sin(x)\right)$$

Donc :

$$f \in F \Longleftrightarrow f'' - 2f' + 2f = 0 \Longleftrightarrow \exists (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \lambda\mathrm{e}^x\cos(x) + \mu\mathrm{e}^x\sin(x)$$

Soit : $f \in F \Longleftrightarrow \exists (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2,\ f = \lambda g + \mu h$ (avec $g(x) = \mathrm{e}^x\cos(x)$ et $h(x) = \mathrm{e}^x\sin(x)$).

Finalement : $f \in F \Longleftrightarrow \mathrm{Vect}(g,h)$.

**Conclusion**. $F = \mathrm{Vect}\,(g,h)$. En particulier $F$ est un sev de $\mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$, le sev engendré par les fonctions $g$ et $h$.

**Exercice 17. — (Familles génératrices).** Montrer que $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x+y+z = 0 \quad \text{et} \quad 2x - y + 3z = 0\}$ est un sev de $\mathbb{R}^3$, et en déterminer une famille génératrice.

Soit $\overrightarrow{v} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. On a : $\quad \overrightarrow{v} \in F \Longleftrightarrow \begin{cases} x+y+z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \end{cases}$

Le système comporte deux équations et trois inconnues. Le résoudre, c'est exprimer deux inconnues en fonction de la dernière. Par exemple, on peut exprimer $x$ et $y$ en fonction de $z$. En avant :

$$\begin{cases} x+y+z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x+y = -z \\ 2x - y = -3z \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = -4z/3 \\ y = z/3 \end{cases}$$

Donc : $\overrightarrow{v} \in F \Longleftrightarrow \exists\, z \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{v} = \left(\dfrac{-4}{3}z, \dfrac{1}{3}z, z\right) \Longleftrightarrow \exists\, z \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{v} = z\left(\dfrac{-4}{3}, \dfrac{1}{3}, 1\right)$.

**Conclusion**. $F = \left(\dfrac{-4}{3}, \dfrac{1}{3}, 1\right)$. En particulier $F$ est un sev de $\mathbb{R}^3$, le sev engendré par le vecteur $\overrightarrow{u} = \left(\dfrac{-4}{3}, \dfrac{1}{3}, 1\right)$.

Ceci signifie que $F$ est une droite dans $\mathbb{R}^3$, la droite de l'espace ayant pour vecteur directeur le vecteur $\overrightarrow{u}$.

**Interprétation géométrique**. Les équations $x+y+z=0$ et $2x-y+3z=0$ sont celles de deux plans de l'espace usuel. Ces plans ne sont clairement pas parallèles, et ont un point commun (l'origine de l'espace). Il s'ensuit que leur intersection est une droite, précisément la droite $F$ dont on a déterminé un vecteur directeur dans les calculs précédents.

**Exercice 18. —** $^{(*)}$ Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs d'un $\mathbb{K}$-ev $E$. Montrer que :

$$\mathrm{Vect}\,(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \mathrm{Vect}\,(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$$

Montrons l'égalité de l'énoncé par double inclusion.

➤ **Etape 1** ($\subset$). Soit $\overrightarrow{w} \in \mathrm{Vect}\,(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})$.

Par définition : $\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ \overrightarrow{w} = \lambda\,(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}) + \mu\,(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})$

Donc : $\overrightarrow{w} = (\lambda + \mu)\,\overrightarrow{u} + (\mu - \lambda)\,\overrightarrow{v}$.

Donc : $\overrightarrow{w} \in \mathrm{Vect}\,(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

Ainsi : $\overrightarrow{w} \in \mathrm{Vect}\,(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \Longrightarrow \overrightarrow{w} \in \mathrm{Vect}\,(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$

Par suite : $\mathrm{Vect}\,(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \subset \mathrm{Vect}\,(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \qquad (\spadesuit)$

➤ **Etape 2** ($\supset$). Soit $\overrightarrow{w} \in \mathrm{Vect}\,(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

Par définition : $\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ \overrightarrow{w} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}$

Or : $\overrightarrow{u} = \dfrac{1}{2}\,((\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}) + (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}))$ et $\overrightarrow{u} = \dfrac{1}{2}\,((\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) - (\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}))$

Donc : $\overrightarrow{w} = \dfrac{\lambda}{2}\,((\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}) + (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})) + \dfrac{\mu}{2}\,((\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) - (\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}))$.

Donc : $\overrightarrow{w} = \dfrac{\lambda + \mu}{2}\,(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \dfrac{\lambda - \mu}{2}\,(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v})$

Donc : $\overrightarrow{w} \in \mathrm{Vect}\,(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v})$.

Ainsi : $\overrightarrow{w} \in \mathrm{Vect}\,(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \Longrightarrow \overrightarrow{w} \in \mathrm{Vect}\,(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})$

Par suite : $\text{Vect}\,(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \supset \text{Vect}\,(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \qquad (\clubsuit)$

**Conclusion**. D'après la règle de double inclusion, on déduit de $(\spadesuit)$ et $(\clubsuit)$ que :

$$\text{Vect}\,(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \text{Vect}\,(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$$

**Remarque**. Cet exercice montre en particulier qu'il n'y a pas **unicité** de “la” famille génératrice d'un sev.

Autrement dit, un même sev peut être engendré par des familles différentes, comme dans le cas présent : la famille $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\}$ est une famille génératrice de $\text{Vect}\,(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, et la famille $\{\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\}$ est une autre famille génératrice de ce même sev.

Avec un peu de recul, ceci généralise un fait que vous connaissiez déjà depuis longtemps : dans le plan usuel, deux vecteurs non colinéaires suffisent à engendrer le plan, et ces deux vecteurs ne sont pas nécessairement $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$.

**Exercice 19.** — Dans $E = \text{M}_2(\mathbb{R})$, on considère la partie $F$ constituée des matrices dont la somme des coefficients de la première ligne est nulle.

Montrer que $F$ est un sev de $E$, et en déterminer une famille génératrice.

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{M}_2(\mathbb{R})$.

On a :

$$M \in F \Longleftrightarrow a + b = 0 \Longleftrightarrow b = -a \qquad (\spadesuit)$$

Par suite :

$$M \in F \Longleftrightarrow \exists\,(a, c, d) \in \mathbb{R}^3,\ M = \begin{pmatrix} a & -a \\ c & d \end{pmatrix}$$

Donc :

$$M \in F \Longleftrightarrow \exists\,(a, c, d) \in \mathbb{R}^3,\ M = a\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc :

$$M \in F \Longleftrightarrow M \in \text{Vect}\,(E_{11} - E_{12}, E_{21}, E_{22}) \qquad (\clubsuit)$$

**Conclusion**. $F = \text{Vect}\,(E_{11} - E_{12}, E_{21}, E_{22})$.

Donc $F$ est un sev de $\text{M}_2(\mathbb{R})$.

En outre, une famille génératrice de $F$ est : $\mathscr{F} = \{E_{11} - E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$.

**Remarque**. Il n'est pas indispensable de détailler autant les raisonnements ici (je ne l'ai fait que pour expliquer pas à pas la démarche). On peut en particulier passer directement de la ligne $(\spadesuit)$ à la ligne $(\clubsuit)$.

**Exercice 20. — (Sev de $\mathbb{R}_4[X]$, famille génératrice)**. Dans $\mathbb{R}_4[X]$, on considère la partie :

$$F = \{P \in \mathbb{R}_4[X] \,|\, 2 \text{ est racine de } P \text{ de multiplicité au moins } 3\}$$

Montrer que $F$ est un sev de $\mathbb{R}_4[X]$, et en déterminer une famille génératrice.

Soit $P \in \mathbb{R}_4[X]$. D'après la formule de Taylor dans $\mathbb{R}_4[X]$, on a :

$$P = P(2) + P'(2)(X-2) + \frac{P''(2)}{2}(X-2)^2 + \frac{P^{(3)}(2)}{6}(X-2)^3 + \frac{P^{(4)}(2)}{24}(X-2)^4$$

Or :

$$[2 \text{ est racine de } P \text{ de multiplicité au moins } 3] \Longleftrightarrow [P(2) = P'(2) = P''(2) = 0]$$

Par suite :

$$[P \in F] \Longleftrightarrow \left[P = \frac{P^{(3)}(2)}{6}(X-2)^3 + \frac{P^{(4)}(2)}{24}(X-2)^4\right]$$

Ainsi :

$$[P \in F] \Longrightarrow [P \in \operatorname{Vect}((X-2)^3, (X-2)^4)]$$

L'implication réciproque est immédiate. Par conséquent :

$$[P \in F] \Longleftrightarrow [P \in \operatorname{Vect}((X-2)^3, (X-2)^4)] \qquad \text{soit : } F = \operatorname{Vect}((X-2)^3, (X-2)^4).$$

**Conclusion**. $F$ est un sev de $\mathbb{R}_4[X]$, et une famille de génératrice de $F$ est $\{(X-2)^3, (X-2)^4\}$.

**Remarque**. Les polynômes $(X-2)^3$ et $(X-2)^4$ ne sont pas colinéaires (pas proportionnels). Lors du prochain chapitre, nous pourrons alors en déduire que $F$, le sev engendré par ces deux polynômes, est un plan dans $\mathbb{R}_4[X]$ (càd un sev de dimension 2... dans un espace de dimension 5, attention aux neurones si vous souhaitez vous le représenter mentalement).

## Applications linéaires

**Exercice 21. — (Applications linéaires)** Les applications suivantes sont-elles $\mathbb{R}-$linéaires ?

1/ $f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (x,y,xy) \end{array}$

On a : $f_1(1,1) = (1,1,1)$ et $f_1(2,2) = (2,2,4)$. Donc : $f_1(2,2) \neq 2f_1(1,1)$.

**Conclusion** : $f_1$ n'est pas linéaire.

2/ $f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x+2y \end{array}$

Soient $(x,y)$ et $(x',y')$ dans $\mathbb{R}^2$, $\lambda$ et $\mu$ deux réels. On a :

$$f_2(\lambda(x,y) + \mu(x',y')) = f_2(\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y') = \lambda x + \mu x' + 2(\lambda y + \mu y') = \lambda(x+2y) + \mu(x'+2y')$$

Ainsi : $f_2(\lambda(x,y) + \mu(x',y')) = \lambda f_2(x,y) + \mu f_2(x',y')$.

**Conclusion** : $f_2$ est linéaire.

3/ $$f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & (1+X^2)P' + XP \end{array}$$

Soient $P$ et $Q$ dans $\mathbb{R}[X]$, $\lambda$ et $\mu$ deux réels. On a :

$$f_3(\lambda P + \mu Q) = (1+X^2)(\lambda P + \mu Q)' + X(\lambda P + \mu Q) = \lambda\left[(1+X^2)P' + XP\right] + \mu\lambda\left[(1+X^2)Q' + XQ\right]$$

Ainsi : $f_3(\lambda P + \mu Q) = \lambda f_3(P) + \mu f_3(Q)$.

**Conclusion** : $f_3$ est linéaire.

4/ $$f_4 : \begin{array}{ccc} \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x \end{array}$$

Soient $f$ et $g$ dans $\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\lambda$ et $\mu$ deux réels. On a :

$$f_4(\lambda f + \mu g) = \int_0^2 (\lambda f + \mu g)(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^2 \lambda f(x) + \mu g(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x + \mu \int_0^2 g(x)\,\mathrm{d}x$$

Ainsi : $f_4(\lambda f + \mu g) = \lambda f_4(P) + \mu f_4(Q)$.

**Conclusion** : $f_4$ est linéaire.

**Exercice 22. — (Application linéaire et commutant)**. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

On considère l'application :

$$\begin{array}{rcl} f : \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \longmapsto & MA - AM \end{array}$$

1/ Montrer que l'application $f$ est linéaire.

Soient $M$ et $N$ deux matrices de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, $\lambda$ et $\mu$ deux scalaires.

On a :

$f(\lambda M + \mu N) = (\lambda M + \mu N)A - A(\lambda M + \mu N) = \lambda MA + \mu NA - \lambda AM - \mu AN = \lambda(MA - AM) + \mu(NA - AN)$

Ainsi :

$$f(\lambda M + \mu N) = \lambda f(M) + \mu f(N)$$

En résumé, on a établi que :

$$\forall (M,N) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})^2,\ \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2,\ f(\lambda M + \mu N) = \lambda f(M) + \mu f(N)$$

**Conclusion**. L'application $f$ est une application linéaire.

**Remarque**. Puisque l'application $f$ est une application linéaire de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ dans le même espace vectoriel $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, on dit que $f$ est un **endomorphisme de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$**, et on le note : $f \in \mathscr{L}(\mathrm{M}_n(\mathbb{K}))$.

2/ En déduire que le commutant de $A$ est un sev de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ (par un autre argument que dans l'exercice 1, évidemment).

Par définition, le commutant de $A$ est l'ensemble des matrices $M$ telles que $MA - AM = 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{K})}$, càd telles que $f(M) = 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{K})}$.

En d'autres termes, le commutant de $A$ est égal à $\ker(f)$ (le noyau de $f$).

**Conclusion**. Le commutant de $A$ est un sev de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ (puisque c'est le noyau d'une application linéaire).

**Exercice 23.** — **(Application linéaire)**. On considère l'application :

$$f : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]$$
$$P \longmapsto P - X^2P''$$

1/ Montrer que l'application $f$ est linéaire.

Soient $P$ et $Q$ deux polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$, $\lambda$ et $\mu$ deux réels.

On a :

$$f(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P + \mu Q) - X^2(\lambda P + \mu Q)'' = \lambda P + \mu Q - \lambda X^2 P'' - \mu X^2 Q''$$

(essentiellement par linéarité de la dérivation). Donc :

$$f(\lambda P + \mu Q) = \lambda(P - X^2P'') + \mu(Q - X^2Q'') = \lambda f(P) + \mu f(Q)$$

En résumé, on a établi que :

$$\forall\,(P,Q) \in \mathbb{R}_2[X],\ \forall\,(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2,\ f(\lambda P + \mu Q) = \lambda f(P) + \mu f(Q)$$

**Conclusion**. L'application $f$ est une application linéaire.

**Remarque**. Puisque l'application $f$ est une application linéaire de $\mathbb{R}_2[X]$ dans le même espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$, $f$ est un **endomorphisme de** $\mathbb{R}_2[X]$, et on le note : $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_2[X])$.

2/ Déterminer le noyau et l'image de $f$.

Le noyau de $f$ est par définition :

$$\ker(f) = \left\{P \in \mathbb{R}_2[X],\ f(P) = 0_{\mathbb{R}_2[X]}\right\} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \ker(f) = \{P \in \mathbb{R}_2[X],\ P = X^2P''\}$$

Déterminer $\ker(f)$ revient donc à résoudre l'équation polynomiale $P = X^2P''$. Après avoir observé que le polynôme nul est solution, la comparaison des degrés ne donne aucune info décisive ($n = n\ldots$). En revanche, celle des coefficients dominants est plus intéressante. En notant $a_n$ le coef dominant de $P$, on obtient :

$$a_n = n(n-1)a_n \qquad \text{d'où}^{\ddagger} : \quad n(n-1) = 1$$

Or $n(n-1)$ est un entier pair, ce qui n'est pas vraiment le cas de 1 ;-)

On en déduit que l'équation $P = X^2P''$ admet comme unique solution le polynôme nul.

**Conclusion**. Le noyau de $f$ est : $\ker(f) = \left\{0_{\mathbb{R}_2[X]}\right\}$.

‡. Puisque le coefficient dominant $a_n$ est nécessairement non nul.

Déterminons à présent l'image de $f$. L'espace de départ de $f$ est $\mathbb{R}_2[X]$, et il est usuel que :

$$\mathbb{R}_2[X] = \text{Vect}\left(1, X, X^2\right)$$

D'après le cours, on en déduit que :

$$\text{im}(f) = \text{Vect}\left(f(1), f(X), f(X^2)\right)$$

Par suite :

$$\text{im}(f) = \text{Vect}\left(1, X, -X^2\right)$$

Or :

$$\text{Vect}\left(1, X, -X^2\right) = \text{Vect}\left(1, X, X^2\right)$$

d'après "la" propriété de la page 93 du cours.

On en déduit que :

$$\text{im}(f) = \text{Vect}\left(1, X, X^2\right) \qquad \text{càd} \qquad \text{im}(f) = \mathbb{R}_2[X]$$

**Conclusion**. L'image de $f$ est : $\text{im}(f) = \mathbb{R}_2[X]$. L'endomorphisme $f$ est donc **surjectif**.

**Exercice 24. — (Application linéaire)**. Dans cet exercice, on note $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et $\omega \in \mathbb{R}_+^*$. On considère l'application :

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow E \\ y &\longmapsto y'' + \omega^2 y \end{aligned}$$

1/ Montrer que l'application $f$ est linéaire.

Soient $g$ et $h$ deux fonctions de $E$, $\lambda$ et $\mu$ deux réels.

On a :

$$f(\lambda g + \mu h) = (\lambda g + \mu h)'' + \omega^2(\lambda g + \mu h) = \lambda g'' + \mu h'' + \lambda\omega^2 g + \mu\omega^2 h$$

(par linéarité de la dérivation). Donc :

$$f(\lambda g + \mu h) = \lambda(g'' + \omega^2 g) + \mu(h'' + \omega^2 h) = \lambda f(g) + \mu f(h)$$

En résumé, on a établi que :

$$\forall\,(g, h) \in E^2,\ \forall\,(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ f(\lambda g + \mu h) = \lambda f(g) + \mu f(h)$$

**Conclusion**. L'application $f$ est une application linéaire.

**Remarque**. Puisque l'application $f$ est une application linéaire de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dans le même espace vectoriel $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $f$ est un **endomorphisme de** $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et on le note : $f \in \mathscr{L}\left(\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})\right)$.

2/ Déterminer le noyau de $f$.

Le noyau de $f$ est par définition :

$$\ker(f) = \left\{g \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ f(g) = 0_{\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})}\right\} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \ker(f) = \left\{g \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ g'' + \omega^2 g = 0\right\}$$

Déterminer $\ker(f)$ revient donc à résoudre l'équation différentielle $g'' + \omega^2 g = 0$.

Or la solution générale de cette EDL2 archi-célèbre est :

$$\forall\, t \in \mathbb{R},\ g(t) = \lambda \cos(\omega t) + \mu \sin(\omega t)$$

Notons, pour tout réel $t$ : $f_1(t) = \cos(\omega t)$ et $f_2(t) = \sin(\omega t)$.

Avec ces notations, le raisonnement précédent a permis d'établir que :

$$g \in \ker f \Longleftrightarrow g'' + \omega^2 g = 0 \Longleftrightarrow \exists\,(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2,\ g = \lambda f_1 + \mu f_2 \Longleftrightarrow g \in \mathrm{Vect}(f_1, f_2)$$

En résumé : $\ker f = \mathrm{Vect}(f_1, f_2)$.

**Conclusion**. Le noyau de $f$ est : $\ker(f) = \mathrm{Vect}(f_1, f_2)$

(avec $f_1(t) = \cos(\omega t)$ et $f_2(t) = \sin(\omega t)$ pour tout réel $t$).

**Remarque**. Les fonctions $f_1$ et $f_2$ ne sont clairement pas colinéaires (pas proportionnelles). Le sev de $E$ qu'elles engendrent sera donc un **plan** (càd un sev de dimension 2) dans l'espace vectoriel $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.[§]

**Exercice 25.** — **(Application linéaire)**. On considère l'application :

$$f : \mathrm{M}_2(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathrm{M}_2(\mathbb{K}), \qquad M \longmapsto M - {}^tM$$

1/ Montrer que l'application $f$ est linéaire.

Soient $M$ et $N$ dans $\mathrm{M}_2(\mathbb{K})$, $\lambda$ et $\mu$ deux scalaires. On a (essentiellement par linéarité de la transposition) :

$$f(\lambda M + \mu N) = \lambda M + \mu N - {}^t(\lambda M + \mu N) = \lambda M + \mu N - \lambda\,{}^tM + \mu\,{}^tN = \lambda\,(M - {}^tM) + \mu\,(N - {}^tN)$$

Finalement : $f(\lambda M + \mu N) = \lambda f(M) + \mu f(N)$

**Conclusion**. L'application $f$ est linéaire (c'est un **endomorphisme** de $\mathrm{M}_2(\mathbb{K})$).

2/ Déterminer le noyau de $f$.

Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{K})$. Par définition de noyau :

$$[M \in \ker f] \Longleftrightarrow \left[f(M) = 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{K})}\right] \Longleftrightarrow \left[M - {}^tM = 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{K})}\right] \Longleftrightarrow [M = {}^tM]$$

**Conclusion**. Le noyau de $f$ est le sev des matrices symétriques de $\mathrm{M}_2(\mathbb{K})$.

§. Cette affirmation concernant la dimension de $\ker f$ sera précisée et justifiée dans le chapitre suivant d'algèbre linéaire consacré à la notion de dimension (chapitre 22).

3/ On note $\mathrm{A}_2(\mathbb{K})$ la partie de $\mathrm{M}_2(\mathbb{K})$ constituée des matrices antisymétriques. Montrer que $\mathrm{A}_2(\mathbb{K}) = \mathrm{Vect}(A)$, où $A$ est une matrice que l'on explicitera.

Soit $PM \in \mathrm{M}_2(\mathbb{K})$. On a :

$$[M \in \mathrm{A}_2(\mathbb{K})] \Longleftrightarrow \left[\exists\, b \in K,\ M = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}\right] \Longleftrightarrow [\exists\, b \in K,\ M = b\,(E_{12} - E_{21})] \Longleftrightarrow [M \in \mathrm{Vect}\,(E_{12} - E_{21})]$$

En résumé :

$$[M \in \mathrm{A}_2(\mathbb{K})] \Longleftrightarrow [M \in \mathrm{Vect}\,(E_{12} - E_{21})]$$

**Conclusion**. $\mathrm{A}_2(\mathbb{K}) = \mathrm{Vect}\,(E_{12} - E_{21})$.

**Remarque**. L'ensemble $\mathrm{A}_2(\mathbb{K})$ des matrices antisymétriques de $\mathrm{M}_2(\mathbb{K})$ est donc un sev, engendré par une seule matrice (un seul vecteur) non nul. On dira dans cette situation que $\mathrm{A}_2(\mathbb{K})$ est une **droite vectorielle** de $\mathrm{M}_2(\mathbb{K})$ (càd un sev de dimension 1… dans un espace vectoriel de dimension 4).

4/ Montrer que $\mathrm{im}\, f = \mathrm{A}_2(\mathbb{K})$.

On connaît une famille génératrice de l'espace de définition de $f$ :

$$\mathrm{M}_2(\mathbb{K}) = \mathrm{Vect}(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$$

D'après le cours, on a donc :

$$\mathrm{im} f = \mathrm{Vect}(f\,(E_{11})\,, f\,(E_{12})\,, f\,(E_{21})\,, f\,(E_{22}))$$

Des calculs sans difficultés permettent d'en déduire :

$$\mathrm{im} f = \mathrm{Vect}(0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{K})}, E_{12} - E_{21}, E_{21} - E_{12}, 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{K})}) \qquad \text{Par suite : } \mathrm{im} f = \mathrm{Vect}(E_{12} - E_{21})$$

**Conclusion**. $\mathrm{im} f = \mathrm{Vect}\,(E_{12} - E_{21})$. D'après la question précédente, on en déduit que : $\mathrm{im} f = \mathrm{A}_2(\mathbb{K})$

**Exercice 26. — (Noyau d'une application linéaire et équation différentielle linéaire)**. On considère l'application :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f &\longmapsto f'' - 6f' + 9f \end{aligned}$$

1/ Montrer que l'application $\varphi$ est linéaire.

Commençons par observer que pour toute fonction $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on a $(f'' - 6f' + 9f) \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ selon les théorèmes généraux. Ce qui assure que $\varphi$ est bien définie.

Prouvons sa linéarité : soient $f$ et $g$ deux fonctions de $\mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\lambda$ et $\mu$ deux réels. On a :

$$\varphi(\lambda f + \mu g) = (\lambda f + \mu g)'' - 6(\lambda f + \mu g)' + 9(\lambda f + \mu g)$$

Par linéarité de la dérivation :

$$\varphi(\lambda f+\mu g)=\lambda f''+\mu g''-6\lambda f'-6\mu g'+9\lambda f+9\mu g$$

Donc :

$$\varphi(\lambda f+\mu g)=\lambda\left(f''-6f'+9f\right)+\mu\left(g''-6g'+9g\right)$$

Subséquemment :

$$\varphi(\lambda f+\mu g)=\lambda\varphi(f)+\mu\varphi(g)$$

**Conclusion**. L'application $\varphi$ est linéaire.

2/ Déterminer le noyau de $\varphi$.

Soit $f\in\mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Par définition de noyau :

$$[f\in\ker\varphi]\Longleftrightarrow\left[\varphi(f)=0_{\mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})}\right]\Longleftrightarrow\left[f''-6f'+9f=0_{\mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})}\right]$$

Le sev $\ker\varphi$ est donc constitué des solutions générales de l'EDL $y''-6y'+9y=0$. Or, d'après le cours sur les EDL2 :

$$[f\in\ker\varphi]\Longleftrightarrow\left[\exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2,\ \forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=(\lambda x+\mu)\,\mathrm{e}^{3x}\right]$$

Notons, pour tout $x$ réel : $f_1(x)=x\mathrm{e}^{3x}$ et $f_2(x)=\mathrm{e}^{3x}$.

**Conclusion**. On a établi que : $\ker\varphi=\mathrm{Vect}(f_1,f_2)$.

**Remarque**. Puisque les fonctions $f_1$ et $f_2$ ne sont pas colinéaires, $\ker\varphi$ est un plan vectoriel dans l'espace vectoriel $\mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

**Exercice 27. — (Noyau d'une application linéaire et suite récurrente linéaire)**. On considère l'application :

$$\begin{aligned}\varphi:\mathbb{R}^{\mathbb{N}}&\longrightarrow\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\\(u_n)_n&\longmapsto(u_{n+2}+u_{n+1}+u_n)_n\end{aligned}$$

1/ Montrer que l'application $\varphi$ est linéaire.

Soient $u$ et $v$ deux suites réelles, $\lambda$ et $\mu$ deux réels. On a :

$$\varphi(\lambda u+\mu v)=w$$

où $w$ est la suite de terme général :

$$w_n=\lambda u_{n+2}\mu v_{n+2}+\lambda u_{n+1}+\mu v_{n+1}+\lambda u_n+\mu v_n$$

soit :

$$w_n = \lambda\left(u_{n+2} + u_{n+1} + u_n\right) + \mu\left(v_{n+2} + v_{n+1} + v_n\right)$$

On en déduit que :

$$w = \lambda\varphi(u) + \mu\varphi(v) \qquad \text{càd} \qquad \varphi(\lambda u + \mu v) = \lambda\varphi(u) + \mu\varphi(v)$$

**Conclusion**. L'application $\varphi$ est linéaire.

2/ Déterminer le noyau de $\varphi$.

Le noyau de $\varphi$ est l'ensemble des suites réelles $(u_n)$ telles que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} + u_{n+1} + u_n = 0$$

Une telle suite est une SRL2, et d'après le cours sur les suites, on peut alors affirmer que :

$$\exists\,(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) + \mu\sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)$$

**Conclusion**. On a établi que $\ker\varphi = \text{Vect}\left((v_n)_n, (w_n)_n\right)$

en ayant posé, pour tout $n$ entier naturel : $v_n = \cos\left(\dfrac{2n\pi}{3}\right)$ et $w_n = \sin\left(\dfrac{2n\pi}{3}\right)$.

**Exercice 28.** — **(Noyau d'une application linéaire et équation polynomiale)**. On considère l'application :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{K}_3[X] &\longrightarrow \mathbb{K}_3[X] \\ P &\longmapsto P - (X+1)P' \end{aligned}$$

1/ Montrer que l'application $\varphi$ est linéaire.

Commençons par observer que l'application $\varphi$ est bien définie, puisque si $P$ est dans $\mathbb{K}_3[X]$, les propriétés du degré assurent que le polynôme $P - (X+1)P'$ est de degré au plus égal à 3 (c'est effectivement un élément de $\mathbb{K}_3[X]$).

Soient $P$ et $Q$ deux polynômes dans $\mathbb{K}_3[X]$, $\lambda$ et $\mu$ deux scalaires. On a :

$$\varphi\left(\lambda P + \mu Q\right) = \left(\lambda P + \mu Q\right) - (X+1)\left(\lambda P + \mu Q\right)'$$

Par linéarité de la dérivation (formelle dans l'anneau des polynômes) :

$$\varphi\left(\lambda P + \mu Q\right) = \left(\lambda P + \mu Q\right) - (X+1)\left(\lambda P' + \mu Q'\right)$$

D'où en développant puis en regroupant judicieusement les termes :

$$\varphi\left(\lambda P + \mu Q\right) = \lambda\left(P - (X+1)P'\right) + \mu\left(Q - (X+1)Q'\right)$$

Ainsi :

$$\varphi\left(\lambda P+\mu Q\right)=\lambda\varphi(P)+\mu\varphi(Q)$$

**Conclusion**. L'application $\varphi$ est linéaire.

2/ Déterminer le noyau et l'image de $\varphi$.

Le noyau de $\varphi$ est l'ensemble des polynômes de $\mathbb{K}_3[X]$ solutions de l'équation polynomiale : $P=(X+1)P'$.

Pour résoudre celle-ci, on se convainc rapidement que le polynôme nul est solution, qu'il n'existe pas de solution de degré 0, et que la comparaison des degrés ne donne aucune info décisive ($n=n\ldots$).

En comparant les coeffs dominants, on obtient que les éventuels $P$ non nuls solutions de cette équation sont de degré 1. Posons donc $P=aX+b$ avec $a\in\mathbb{K}^*$.

On a : $P$ solution SSI $aX+b=aX+a$ SSI $a=b$.

En résumé : $P\in\ker\varphi\Longleftrightarrow\exists\, a\in\mathbb{K},\ P=a(X+1)$.

**Conclusion**. $\ker\varphi=\mathrm{Vect}(X+1)$.

**Remarque**. Puisque le polynôme $(X+1)$ est non nul (wouaouh !), $\ker\varphi$ est le sev engendré par un vecteur non nul : c'est donc une droite vectorielle dans l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré au plus 3.

➤ **Déterminons à présent l'image de $\varphi$.**

On connaît une famille génératrice de l'espace de définition de $\varphi$ :

$$\mathbb{K}_3[X]=\mathrm{Vect}(1,X,X^2,X^3)$$

D'après le cours, on a donc :

$$\mathrm{im}\varphi=\mathrm{Vect}(\varphi\left(1\right),\varphi\left(X\right),\varphi\left(X^2\right),\varphi\left(X^3\right))$$

Des calculs sans difficultés permettent d'en déduire :

$$\mathrm{im}\varphi=\mathrm{Vect}(1,-1,-X^2-2X,-2X^3-3X^2)$$

**Conclusion**. $\mathrm{im}\varphi=\mathrm{Vect}\left(1,-X^2-2X,-2X^3-3X^2\right)$. L'interprétation géométrique attendra un peu.

**Exercice 29.** — Soient $E$ un $\mathbb{K}$-ev, et $(f,g)\in\mathscr{L}(E)^2$. On suppose que $f\circ g=0_{\mathscr{L}(E)}$.

Montrer que $\mathrm{im}(g)\subset\ker(f)$.

Soit $\overrightarrow{V}\in\mathrm{im}\,g$ : $\exists\,\overrightarrow{v}\in E,\ \overrightarrow{V}=g(\overrightarrow{v})$.

Par suite :

$$f(\overrightarrow{V})=f\left(g(\overrightarrow{v})\right)=\left(f\circ g\right)\left(\overrightarrow{v}\right)=\overrightarrow{0}_E$$

la dernière égalité provenant de l'hypothèse : $f \circ g = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

Par suite : $\overrightarrow{V} \in \ker f$.

On a donc établi l'implication : $\overrightarrow{V} \in \operatorname{im} g \Longrightarrow \overrightarrow{V} \in \ker f$.

**Conclusion**. $\operatorname{im}(g) \subset \ker(f)$

**Exercice 30. — (Les 3 méthodes).** On dispose (pour l'instant) de trois méthodes pour établir qu'une partie $F$ est un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-ev $E$ :

— **la méthode "(SEV1), (SEV2), (SEV3)"** ;

— **la méthode "Vect"** : on prouve que $F = \operatorname{Vect}(\mathscr{F})$, avec $\mathscr{F}$ une famille de vecteurs de $E$ ;

— **la méthode "ker"** : on prouve que $F = \ker f$, où $f$ est une certaine application linéaire.

On appelle M1, M2 et M3 ces trois méthodes permettant de prouver qu'une partie est un sev d'un ev donné. Dans chacune des questions suivantes, indiquer quelle(s) méthode(s) vous semble(nt) adaptée(s) pour parvenir au résultat ; puis traiter la question.

1/ Etablir que l'ensemble des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ est un sev de $\mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Seule la méthode M1 fonctionne : la vérification des axiomes SEVi est alors aisée.

2/ Etablir que l'ensemble des matrices antisymétriques est un sev de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

Les méthodes M1, M2 et M3 peuvent être utilisées.

La plus rapide est M3 : l'application $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \longmapsto A + {}^tA \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ est un endomorphisme de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ (ceci n'a pas à être détaillé), dont le noyau est l'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

3/ Etablir que l'ensemble des polynômes de $\mathbb{K}_5[X]$ divisibles par $X^3$ est un sev de $\mathbb{K}_5[X]$, et en déterminer une famille génératrice.

A cause du "et", seule la méthode M2 peut être utilisée. [¶]

Notons $F$ l'ensemble des polynômes divisibles de $\mathbb{K}_5[X]$ par $X^3$, càd :

$$F = \{P \in \mathbb{K}_5[X],\ X^3 | P\}$$

Soit $P$ un polynôme dans $\mathbb{K}_5[X]$. On a :

$$[P \in F] \Longleftrightarrow [\exists\, Q \in \mathbb{K}_2[X],\ P = X^3 Q] \Longleftrightarrow [\exists\, (a,b,c) \in \mathbb{K}^3,\ P = X^3(aX^2 + bX + c)]$$

Ainsi :

$$[P \in F] \Longleftrightarrow [\exists\, (a,b,c) \in \mathbb{K}^3,\ P = aX^5 + bX^4 + cX^3]$$

**Conclusion**. $F = \operatorname{Vect}(X^3, X^4, X^5)$. En particulier $F$ est un sev de $\mathbb{K}_5[X]$, et une famille génératrice en est $\mathscr{F} = \{X^3, X^4, X^5\}$.

¶. La méthode M1 ne permettrait de répondre qu'à la première moitié de la question.

4/ Etablir que l'ensemble des suites géométriques de raison 2 est un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Les méthodes M1 et M2 peuvent être utilisées.

La plus rapide est M2 : une suite réelle $(u_n)$ est géométrique de raison 2 SSI il existe un réel $u_0$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; u_n = u_0 2^n$$

En notant $F$ l'ensemble des suites réelles géométriques de raison 2, on a donc :

$$F = \text{Vect}\left((2^n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$$

**Conclusion**. $F = \text{Vect}\left((2^n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$. En particulier $F$ est un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, et une famille génératrice de $F$ est le singleton $\mathscr{F} = \left\{(2^n)_{n\in\mathbb{N}}\right\}$.

**Exercice 31. — (Matrice d'une application linéaire).** On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Montrer que l'application

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{K}^2 &\longrightarrow \mathbb{K}^2 \\ X &\longmapsto AX \end{aligned}$$

est un automorphisme de $\mathbb{K}^2$ (càd linéaire et bijective).

**➤ Montrons la linéarité de $\varphi$**

Soient $X$ et $Y$ dans $\mathbb{K}^2$, $\lambda$ et $\mu$ dans $\mathbb{K}$. On a :

$$\varphi(\lambda X + \mu Y) = A(\lambda X + \mu Y) = \lambda AX + \mu AY = \lambda\varphi(X) + \mu\varphi(Y)$$

Donc $\varphi$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.

**➤ Montrons la bijectivité de $\varphi$**

La matrice $A$ est inversible (son déterminant étant non nul). On pose alors :

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{K}^2 &\longrightarrow \mathbb{K}^2 \\ X &\longmapsto A^{-1}X \end{aligned}$$

Il est alors immédiat que : $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi = \text{id}_{\mathbb{K}^2}$.

Par suite $\varphi$ est bijective, et $\varphi^{-1} = \psi$.

**➤ Conclusion : $\varphi$ est un automorphisme de $\mathbb{K}^2$ (noté : $\varphi \in$ GL$(\mathbb{K}^2)$)**

**Exercice 32. — (Matrice d'une application linéaire')**. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

On considère l'application

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{K}^n &\longrightarrow \mathbb{K}^n \\ X &\longmapsto AX \end{aligned}$$

A quelle condition nécessaire et suffisante sur la matrice $A$ l'application $\varphi$ est-elle un automorphisme de $\mathbb{K}^n$ ?

L'application $\varphi$ est clairement linéaire (cf exo précédent).

Par suite, l'application $\varphi$ est un automorphisme de $\mathbb{K}^n$ SSI elle est bijective.

Or, par définition de bijectivité :

$$\varphi \text{ est bijective SSI } \forall\, B \in \mathbb{K}^n,\ \exists!\, X \in \mathbb{K}^n,\ \varphi(X) = B$$

D'où, par définition de $\varphi$ :

$$\varphi \text{ est bijective SSI } \forall\, B \in \mathbb{K}^n,\ \exists!\, X \in \mathbb{K}^n,\ AX = B$$

Ainsi, d'après le cours sur les matrices (chap 13) :

$$\varphi \text{ est bijective SSI } A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$$

**Conclusion**. L'application $\varphi : X \in \mathbb{K}^n \longmapsto AX \in \mathbb{K}^n$ est un automorphisme de $\mathbb{K}^n$ SSI la matrice $A$ est inversible, ce qui se résumé magnifiquement par :

$$\varphi \in \mathrm{GL}(\mathbb{K}^n) \iff A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$$

**Exercice 33. — ("Basique")**. On considère l'application :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\longmapsto (x - y, y + z) \end{aligned}$$

On admet que $f$ est linéaire.

1/ Déterminer $\ker f$ et $\mathrm{im} f$.

Soit $\overrightarrow{v} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$\overrightarrow{v} \in \ker f \iff f(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{0}_{\mathbb{R}^2} \iff \left\{ \begin{array}{l} x - y = 0 \\ y + z = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x = y \\ z = -y \end{array} \right. \iff \exists\, y \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{v} = (y, y, -y)$$

Par suite :

$$\overrightarrow{v} \in \ker f \iff \overrightarrow{v} \in \mathrm{Vect}\,((1, 1, -1))$$

**Conclusion**. $\ker f = \mathrm{Vect}\,((1, 1, -1))$ (le noyau de $f$ est la droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$ de vecteur directeur $\overrightarrow{u} = (1, 1, -1)$).

On a :

$$\mathbb{R}^3 = \mathrm{Vect}\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

D'après le cours, on en déduit que :

$$\mathrm{im} f = \mathrm{Vect}\left( f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Par suite :

$$\mathrm{im} f = \mathrm{Vect}\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

On en déduit que $\mathrm{im} f = \mathbb{R}^2$, par exemple car les deux premiers vecteurs sont non colinéaires et suffisent donc à engendrer le plan réel.

**Conclusion**. $\mathrm{im} f = \mathbb{R}^2$.

2/ L'application $f$ est-elle injective ? Surjective ?

D'après la question précédente, $f$ est surjective puisque $\mathrm{im} f = \mathbb{R}^2$.

Mais $f$ n'est pas injective puisque $\ker f = \mathrm{Vect}\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$, donc : $\ker f \neq \left\{ \overrightarrow{0_{\mathbb{R}^3}} \right\}$.

**Exercice 34. — (Conjugaison)**. Soit $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$). Montrer que l'application :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) &\longrightarrow \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \\ A &\longmapsto P^{-1}AP \end{aligned}$$

est un automorphisme de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

Il est aisé de vérifier que $\varphi$ est linéaire ; c'est donc un endomorphisme de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

Posons judicieusement :

$$\begin{aligned} \psi : \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) &\longrightarrow \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \\ A &\longmapsto PAP^{-1} \end{aligned}$$

Il n'est pas moins aisé que précédemment de vérifier que $\psi$ est également un endomorphisme de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

De plus : $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_{\mathrm{M}_n(\mathbb{K})}$ et $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_{\mathrm{M}_n(\mathbb{K})}$. Ce qui implique en particulier que $\varphi$ est bijectif.

On a ainsi établi que $\varphi$ est un endomorphisme bijectif de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

**Conclusion**. $\varphi$ est un automorphisme de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ ($\varphi \in \mathrm{GL}(\mathrm{M}_n(\mathbb{K}))$).

**Exercice 35. — (Isomorphisme).** On considère l'application :

$$\varphi : \mathbb{K}_2[X] \longrightarrow \mathbb{K}^3$$
$$P \longmapsto (P(0), P(1), P'(0))$$

On admet que $\varphi$ est linéaire.[‖]

1/ Déterminer $\ker\varphi$. Que peut-on en déduire pour $\varphi$ ?

Soit $P \in \mathbb{K}_2[X]$. Supposons que $P \in \ker\varphi$. Alors :

$$P(0) = 0\,; \qquad P(1) = 0\,; \qquad P'(0) = 0$$

Les deux premières conditions, et le fait que $P$ soit de degré au plus 2 impliquent que :

$$\exists\, c \in \mathbb{K},\ P = cX(X-1)$$

Dans ces conditions, on a :

$$P' = c(2X-1)$$

Par suite : $P'(0) = -c$. Or $P'(0) = 0$ par hypothèse, donc $c = 0$, donc $P = 0_{\mathbb{K}_2[X]}$.

**Conclusion**. $\ker\varphi = \left\{0_{\mathbb{K}_2[X]}\right\}$. D'après le cours, on en déduit que **l'application $\varphi$ est injective**.

2/ **Surjectivité de $\varphi$.**

a/ Justifier brièvement que : $\mathrm{im}\varphi = \mathrm{Vect}\,(\varphi(1), \varphi(X), \varphi(X^2))$

On a : $\mathbb{K}_2[X] = \mathrm{Vect}(1, X, X^2)$.

D'après le cours : $\mathrm{im}\varphi = \mathrm{Vect}\,(\varphi(1), \varphi(X), \varphi(X^2))$.

b/ Montrer que la famille $\{\varphi(1), \varphi(X), \varphi(X^2)\}$ est une famille génératrice de $\mathbb{K}^3$, c'est à dire que pour tout $\overrightarrow{v} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{K}^3$, il existe $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{K}^3$ tel que :

$$\alpha_1\varphi(1) + \alpha_2\varphi(X) + \alpha_3\varphi(X^2) = (x_1, x_2, x_3)$$

*Indication : ceci revient à résoudre un système 3×3, ou à inverser une matrice si vous préférez.*

Des calculs sans aucune difficulté donnent :

$$\varphi(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\,; \qquad \varphi(X) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\,; \qquad \varphi(X^2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Soient $\overrightarrow{v} = (x_1, x_2, x_3)$ et $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{K}^3$. On a :

‖. Rien ne vous empêche de le prouver pour vous entraîner encore ; en tous les cas, on a déjà vu suffisamment d'exemples de ce type pour que cela ne vous pose aucun problème (ne pas hésiter à me le signaler si tel était néanmoins le cas ; en maths, tout est toujours très facile, après coup !...).

$$\overrightarrow{v} = \alpha_1\varphi(1) + \alpha_2\varphi(X) + \alpha_3\varphi(X^2) \Longleftrightarrow \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Soit :

$$\overrightarrow{v} = \alpha_1\varphi(1) + \alpha_2\varphi(X) + \alpha_3\varphi(X^2) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \alpha_1 & = & x_1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 & = & x_2 \\ \alpha_2 & = & x_3 \end{array} \right.$$

Or :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \alpha_1 & = & x_1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 & = & x_2 \\ \alpha_2 & = & x_3 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \alpha_1 & = & x_1 \\ \alpha_3 & = & x_2 - x_1 - x_3 \\ \alpha_2 & = & x_3 \end{array} \right.$$

Par suite :

$$\overrightarrow{v} = x_1\varphi(1) + x_3\varphi(X) + (x_2 - x_1 - x_3)\,\varphi(X^2)$$

Le vecteur $\overrightarrow{v}$ étant arbitraire dans le raisonnement précédent, on a établi que :

$$\forall \overrightarrow{v} \in \mathbb{K}^3,\ \exists\,(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{K}^3, \qquad \overrightarrow{v} = \alpha_1\varphi(1) + \alpha_2\varphi(X) + \alpha_3\varphi(X^2)$$

**Conclusion**. La famille $\{\varphi(1), \varphi(X), \varphi(X^2)\}$ est une famille génératrice de $\mathbb{K}^3$.

c/ En déduire que $\varphi$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}_2[X]$ dans $\mathbb{K}^3$.

D'après la question a/ : $\mathrm{im}\varphi = \mathrm{Vect}\,(\varphi(1), \varphi(X), \varphi(X^2))$.

D'après la question b/ : $\mathrm{Vect}\,(\varphi(1), \varphi(X), \varphi(X^2)) = \mathbb{K}^3$.

Ainsi : $\mathrm{im}\varphi = \mathbb{K}^3$. Ce qui signifie que l'application $\varphi$ est surjective.

Puisque de plus $\varphi$ est injective d'après la question 1, $\varphi$ est bijective.

**Conclusion**. $\varphi$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}_2[X]$ dans $\mathbb{K}^3$.

3/ **Surjectivité de $\varphi$, le retour**.

a/ Déterminer trois polynômes $P_1$, $P_2$, $P_3$ tels que :

— $P_1$, $P_2$, $P_3$ sont dans $\mathbb{K}_2[X]$

— $\varphi(P_1) = (1, 0, 0)$ ; $\varphi(P_2) = (0, 1, 0)$ ; $\varphi(P_3) = (0, 0, 1)$

➤ **Déterminons** $P_1$. L'énoncé impose que :

$$P_1 \in \mathbb{K}_2[X]; \qquad P_1(0) = 1; \qquad P_1(1) = 0; \qquad P'_1(0) = 0$$

Donc : $\exists\,(a, b) \in \mathbb{K}^2,\ P_1 = (aX + b)\,(X - 1)$, et :

$$P_1(0) = 1 \Longleftrightarrow -b = 1 \qquad \text{et } P'_1(0) = 0 \Longleftrightarrow b = a$$

Donc : $P_1 = 1 - X^2$.

➤ **Déterminons** $P_2$. L'énoncé impose que :

$$P_2 \in \mathbb{K}_2[X]; \qquad P_2(0) = 0; \qquad P_2(1) = 1; \qquad P'_2(0) = 0$$

Donc : $\exists\, a \in \mathbb{K},\ P_2 = aX^2$, et :

$$P_2(1) = 1 \Longleftrightarrow a = 1$$

Donc : $P_2 = X^2$.

➤ **Déterminons** $P_3$. L'énoncé impose que :

$$P_3 \in \mathbb{K}_2[X]; \qquad P_3(0) = 0; \qquad P_3(1) = 0; \qquad P'_3(0) = 1$$

Donc : $\exists\, a \in \mathbb{K},\ P_3 = aX(X-1)$, et :

$$P'_3(0) = 1 \Longleftrightarrow a = -1$$

Donc : $P_3 = X - X^2$.

b/ Justifier brièvement que $\text{Vect}\,(\varphi(P_1), \varphi(P_2), \varphi(P_3)) \subset \text{im}\varphi$.

On a : $P_1$, $P_2$ et $P_3$ dans $\mathbb{K}_2[X]$.

Donc : $\text{Vect}\,(\varphi(P_1), \varphi(P_2), \varphi(P_3)) \subset \varphi\,(\mathbb{K}_2[X])$.

Donc : $\text{Vect}\,(\varphi(P_1), \varphi(P_2), \varphi(P_3)) \subset \text{im}\varphi$.

c/ Conclure.

Par définition de l'application $\varphi$ et d'après la remarque de la question précédente :

$$\text{Vect}\,(\varphi(P_1), \varphi(P_2), \varphi(P_3)) \subset \text{im}\varphi \subset \mathbb{K}^3 \qquad (\spadesuit)$$

Or par construction des polynômes $P_1$, $P_2$ et $P_3$ on a :

$$\text{Vect}\,(\varphi(P_1), \varphi(P_2), \varphi(P_3)) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$

Et il est donc immédiat que :

$$\text{Vect}\,(\varphi(P_1), \varphi(P_2), \varphi(P_3)) = \mathbb{K}^3 \qquad (\clubsuit)$$

On déduit de $(\spadesuit)$ et de $(\clubsuit)$ que $\text{im}\varphi = \mathbb{K}^3$, et que $\varphi$ est surjective.
**Conclusion**. $\varphi$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}_2[X]$ dans $\mathbb{K}^3$.

**Exercice 36. — (Transport d'une famille génératrice, TRES IMPORTANT).**

Soient $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $\varphi$ un isomorphisme de $E$ dans $F$, et $\mathscr{F} = \{\overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_n}\}$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$) une famille génératrice de $E$.

Montrer que $\varphi(\mathscr{F}) = \{\varphi(\overrightarrow{v_1}), \dots, \varphi(\overrightarrow{v_n})\}$ est une famille génératrice de $F$. **

Puisque $\mathscr{F}$ est une famille génératrice de $E$, on a :

$$E = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_n})$$

D'après le cours, on en déduit que :

$$\mathrm{im}\varphi = \mathrm{Vect}(\varphi(\overrightarrow{v_1}), \dots, \varphi(\overrightarrow{v_n})) \qquad (\spadesuit)$$

Or, $\varphi$ étant un isomorphisme de $E$ dans $F$ par hypothèse, l'application $\varphi$ est en particulier surjective donc :

$$\mathrm{im}\varphi = F \qquad (\clubsuit)$$

**Conclusion**. D'après $(\spadesuit)$ et $(\clubsuit)$, on a : $F = \mathrm{Vect}(\varphi(\overrightarrow{v_1}), \dots, \varphi(\overrightarrow{v_n}))$.

Ce qui signifie que la famille $\varphi(\mathscr{F})$ est une famille génératrice de $F$.

**Exercice 37. — (Application linéaire).** On considère l'application

$$\begin{aligned} f : \mathrm{M}_2(\mathbb{K}) &\longrightarrow \mathrm{M}_2(\mathbb{K}) \\ A &\longmapsto A - \mathrm{tr}(A)\mathrm{I}_2 \end{aligned}$$

1/ Montrer que $f$ est un endomorphisme de $\mathrm{M}_2(\mathbb{K})$.

Soient $A$ et $B$ deux matrices de $\mathrm{M}_2(\mathbb{K})$, $\lambda$ et $\mu$ deux scalaires.

On a, essentiellement par linéarité de la trace :

$$f(\lambda A + \mu B) = \lambda A + \mu B - \mathrm{tr}(\lambda A + \mu B)\mathrm{I}_2 = \lambda A + \mu B - \lambda \mathrm{tr}(A)\mathrm{I}_2 - \mu \mathrm{tr}(B)\mathrm{I}_2$$

D'où :

$$f(\lambda A + \mu B) = \lambda(A - \mathrm{tr}(A)\mathrm{I}_2) + \mu(B - \mathrm{tr}(B)\mathrm{I}_2) \qquad \text{soit :} \qquad f(\lambda A + \mu B) = \lambda f(A) + \mu f(B)$$

**Conclusion**. $f$ est linéaire, de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ : $f$ est donc un endomorphisme de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ ($f \in \mathscr{L}(\mathrm{M}_n(\mathbb{K}))$).

**. Si possible en 3 lignes (en tous les cas, cela peut se faire en 3 lignes, 4 si vous comptez celle de la conclusion).

2/ Déterminer le noyau et l'image de $f$. L'endomorphisme $f$ est-il un automorphisme de $\mathrm{M}_2(\mathbb{K})$ ?

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{K})$. On a :

$$A \in \ker f \iff f(A) = 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{K})} \iff A - \mathrm{tr}(A)\mathrm{I}_2 = 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{K})} \iff \begin{pmatrix} -d & b \\ c & -a \end{pmatrix} = 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{K})} \iff A = 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{K})}$$

D'où : $\ker f = \left\{0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{K})}\right\}$ $\quad$ ($\spadesuit$).

Déterminons l'image de $f$. On a :

$$\mathrm{M}_2(\mathbb{K}) = \mathrm{Vect}\,(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$$

D'après le cours :

$$\mathrm{im} f = \mathrm{Vect}\,(f\,(E_{11})\,, f\,(E_{12})\,, f\,(E_{21})\,, f\,(E_{22}))$$

Des calculs aisés donnent :

$$\mathrm{im} f = \mathrm{Vect}\,(-E_{22}, E_{12}, E_{21}, -E_{11})$$

Or, d'après le cours de nouveau :

$$\mathrm{Vect}\,(-E_{22}, E_{12}, E_{21}, -E_{11}) = \mathrm{Vect}\,(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$$

Ainsi :

$$\mathrm{im} f = \mathrm{M}_2(\mathbb{K})$$

On en déduit que l'endomorphisme $f$ est surjectif ($\clubsuit$).

**Conclusion**. $f$ est un endomorphisme de $\mathrm{M}_n\,(\mathbb{K})$ (question 1), injectif (d'après ($\spadesuit$)) et surjectif (d'après ($\clubsuit$)) : $f$ est donc un automorphisme de $\mathrm{M}_n\,(\mathbb{K})$ ($f \in \mathrm{GL}\,(\mathrm{M}_n\,(\mathbb{K}))$).

**Exercice 38. — (Le retour des DL).**

On considère l'application $\varphi : \mathscr{C}^2\,(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]$

$$f \longmapsto P_f$$

qui à une fonction $f$ de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ associe la partie régulière de son développement limité à l'ordre 2 en 0, notée $P_f$.
On admet que $\varphi$ est linéaire. Est-elle injective ? Surjective ?

Pour tout réel $x$, on pose $f(x) = 1 + x + x^2$ et $g(x) = 1 + x + x^2 + x^3$. On a $\varphi(f) = \varphi(g)$ : $\varphi$ n'est pas injective.

Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$. Posons pour tout réel $x$ : $f(x) = ax^2 + bx + c$. On a $\varphi(f) = P$ : $\varphi$ est surjective.

**Conclusion**. L'application $\varphi$ est surjective, et non injective.

## Sev supplémentaires et projections

**Exercice 39. — (Somme de sev).** Soient $E$ un $\mathbb{K}$-ev, $F$ et $G$ deux sev de $E$.

On définit la **somme** des sev $F$ et $G$ et on note $F+G$ la partie de $E$ constituée des vecteurs de $E$ pouvant s'écrire comme somme d'un vecteur de $F$ et d'un vecteur de $G$, soit :

$$F+G=\left\{\overrightarrow{v}\in E,\ \exists\left(\overrightarrow{f},\overrightarrow{g}\right)\in F\times G,\ \overrightarrow{v}=\overrightarrow{f}+\overrightarrow{g}\right\}$$

Montrer que $F+G$ est un sev de $E$.

Pas beaucoup de choix pour la méthode ici…

Commençons par observer que par définition $F+G$ est une partie de $E$ (SEV1) ; cette partie contient le vecteur nul de $E$ puisque l'on peut écrire $\overrightarrow{0}_E=\overrightarrow{0}_E+\overrightarrow{0}_E$ et que $\overrightarrow{0}_E\in F\cap G$ (SEV2).

Pour conclure, montrons que $F+G$ est stable par combinaison linéaire.

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ dans $F+G$, $\lambda$ et $\mu$ deux scalaires. Par définition de $F+G$ :

$$\exists\left(\overrightarrow{f}_1,\overrightarrow{f}_2\right)\in F^2,\ \exists\left(\overrightarrow{g}_1,\overrightarrow{g}_2\right)\in G^2,\ \overrightarrow{u}=\overrightarrow{f}_1+\overrightarrow{g}_1 \text{ et } \overrightarrow{v}=\overrightarrow{f}_2+\overrightarrow{g}_2$$

Il s'ensuit que :

$$\lambda\overrightarrow{u}+\mu\overrightarrow{v}=\left(\lambda\overrightarrow{f}_1+\mu\overrightarrow{f}_2\right)+\left(\lambda\overrightarrow{g}_1+\mu\overrightarrow{g}_2\right)$$

Or $\lambda\overrightarrow{f}_1+\mu\overrightarrow{f}_2$ appartient à $F$, puisque $\overrightarrow{f}_1$ et $\overrightarrow{f}_2$ appartiennent à $F$ et que $F$ est stable par combinaison linéaire ($F$ est un sev de $E$). Pour des raisons analogues : $\lambda\overrightarrow{g}_1+\mu\overrightarrow{g}_2$ appartient à $G$.

On en déduit que : $\lambda\overrightarrow{u}+\mu\overrightarrow{v}\in F+G$.

On a donc établi que :

$$\forall\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right)\in(F+G)^2,\ \forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2,\ \lambda\overrightarrow{u}+\mu\overrightarrow{v}\in F+G$$

Ce qui signifie que $F+G$ est stable par combinaison linéaire (SEV3).

**Conclusion**. $F+G$ est une partie de $E$, contenant $\overrightarrow{0}_E$, et stable par combinaison linéaire. A ce titre, $F+G$ est un sev de $E$.

**Exercice 40. — (Somme de sev 2).** Soient $E$ un $\mathbb{K}$-ev, et $\overrightarrow{v_1},\ldots,\overrightarrow{v_n},\overrightarrow{w_1},\ldots,\overrightarrow{w_p}$ $(n+p)$ vecteurs de $E$ avec $n$ et $p$ dans $\mathbb{N}^*$.

Montrer que :

$$\operatorname{Vect}\left(\overrightarrow{v_1},\ldots,\overrightarrow{v_n}\right)+\operatorname{Vect}\left(\overrightarrow{w_1},\ldots,\overrightarrow{w_p}\right)=\operatorname{Vect}\left(\overrightarrow{v_1},\ldots,\overrightarrow{v_n},\overrightarrow{w_1},\ldots,\overrightarrow{w_p}\right)$$

C'est un exemple de preuve assez lourde à écrire, mais d'une remarquable facilité.

Soit $\overrightarrow{u}\in E$. On a :

$$\overrightarrow{u}\in\operatorname{Vect}\left(\overrightarrow{v_1},\ldots,\overrightarrow{v_n}\right)+\operatorname{Vect}\left(\overrightarrow{w_1},\ldots,\overrightarrow{w_p}\right)$$

$$\Longleftrightarrow\exists\overrightarrow{f}\in\operatorname{Vect}\left(\overrightarrow{v_1},\ldots,\overrightarrow{v_n}\right),\ \exists\overrightarrow{g}\in\operatorname{Vect}\left(\overrightarrow{w_1},\ldots,\overrightarrow{w_p}\right),\quad\overrightarrow{u}=\overrightarrow{f}+\overrightarrow{g}$$

$$\iff \exists\,(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in\mathbb{K}^n,\ \exists\,(\beta_1,\ldots,\beta_p)\in\mathbb{K}^p,\quad \overrightarrow{u}=\underbrace{(\alpha_1\overrightarrow{v_1}+\cdots+\alpha_n\overrightarrow{v_n})}_{\overrightarrow{f}}+\underbrace{(\beta_1\overrightarrow{w_1}+\cdots+\beta_p\overrightarrow{w_p})}_{\overrightarrow{g}}$$

$$\iff \exists\,(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\beta_1,\ldots,\beta_p)\in\mathbb{K}^{n+p},\quad \overrightarrow{u}=\alpha_1\overrightarrow{v_1}+\cdots+\alpha_n\overrightarrow{v_n}+\beta_1\overrightarrow{w_1}+\cdots+\beta_p\overrightarrow{w_p}$$

$$\iff \overrightarrow{u}\in\operatorname{Vect}(\overrightarrow{v_1},\ldots,\overrightarrow{v_n},\overrightarrow{w_1},\ldots,\overrightarrow{w_p})$$

**Conclusion**. $\operatorname{Vect}(\overrightarrow{v_1},\ldots,\overrightarrow{v_n})+\operatorname{Vect}(\overrightarrow{w_1},\ldots,\overrightarrow{w_p})=\operatorname{Vect}(\overrightarrow{v_1},\ldots,\overrightarrow{v_n},\overrightarrow{w_1},\ldots,\overrightarrow{w_p})$

**Exercice 41. — (Sev supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$).**

Soient $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,|\,x+y-z=0\}$ et $G=\operatorname{Vect}((1,1,1))$. Montrer que $\mathbb{R}^3=F\oplus G$.

On a : $F=\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right)$.

Soit $\overrightarrow{v}=\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$. On cherche 3 réels $a$, $b$ et $c$ tels que :

$$\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

L'égalité précédente est équivalente au système :

$$\begin{cases}a+c=X\\b+c=Y\\a+b+c=Z\end{cases}\iff\begin{cases}a=Z-Y\\b=Z-X\\c=X+Y-Z\end{cases}$$

On en déduit que :

$$\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix}=\underbrace{(Z-Y)\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+(Z-X)\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}}_{\in F}+\underbrace{(X+Y-Z)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}_{\in G}$$

On a donc établi que :

$$\forall\,\overrightarrow{v}\in\mathbb{R}^3,\ \exists\,(\overrightarrow{f},\overrightarrow{g})\in F\times G,\qquad \overrightarrow{v}=\overrightarrow{f}+\overrightarrow{g}$$

Autrement dit : $\mathbb{R}^3=F+G$ $\quad(\spadesuit)$.

Par ailleurs, si $\overrightarrow{v}$ appartient à $F\cap G$, alors il existe $\lambda$ tel que $\overrightarrow{v}=(\lambda,\lambda,\lambda)$ (puisque $\overrightarrow{v}$ est dans $G$) ; et $\lambda+\lambda-\lambda=\lambda=0$ (puisque $\overrightarrow{v}$ appartient à $F$). On en déduit que $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{0}$.

Par conséquent : $F\cap G=\left\{\overrightarrow{0}\right\}$ $\quad(\clubsuit)$.

**Conclusion**. D'après $(\spadesuit)$, $(\clubsuit)$, et la caractérisation des sev supplémentaires : $\mathbb{R}^3=F\oplus G$.

**Exercice 42.** — **(Sev supplémentaires dans $\mathbb{K}_3[X]$).**

Dans $E = \mathbb{K}_3[X]$, on considère $F$ le sev des polynômes de $E$ qui s'annulent en 0, et $G = \text{Vect}\,(X+1)$.

Montrer que : $E = F \oplus G$.

Soit $P \in \mathbb{K}_3[X]$. Notons : $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$ (avec $a$, $b$, $c$ et $d$ dans $\mathbb{K}$).

Supposons qu'il existe deux polynômes $Q$ dans $F$ et $R$ dans $G$ tels que $P = Q + R$. Alors :

$$Q = \alpha X^3 + \beta X^2 + \gamma X \qquad \text{et} \qquad R = \lambda(X+1)$$

Donc :

$$aX^3+bX^2+cX+d = \alpha X^3+\beta X^2+\gamma X+\lambda(X+1) \Longleftrightarrow aX^3+bX^2+cX+d = \alpha X^3+\beta X^2+(\gamma+\lambda)\,X+\lambda$$

Ce qui équivaut encore à :

$$\alpha = a\,; \qquad \beta = b\,; \qquad \lambda = d\,; \qquad \gamma = c - d$$

En résumé :

$$\underbrace{aX^3 + bX^2 + cX + d}_{=P} = \underbrace{\left(aX^3 + \beta X^2 + (c-d)X\right)}_{=Q\in F} + \underbrace{d(X+1)}_{=R\in G}$$

On a donc établi que :

$$\forall\, P \in \mathbb{K}_3[X],\ \exists\,(Q,R) \in F \times G, \quad P = Q + R$$

Autrement dit : $\mathbb{K}_3[X] = F + G \qquad (\spadesuit)$.

Par ailleurs, si $P$ appartient à $F \cap G$, alors il existe $\lambda$ tel que $P = \lambda(X+1)$ (puisque $P$ est dans $G$) ; et $P(0) = \lambda = 0$ (puisque $P$ appartient à $F$). On en déduit que $P = 0_{\mathbb{K}_3[X]}$.

Par conséquent : $F \cap G = \left\{0_{\mathbb{K}_3[X]}\right\} \qquad (\clubsuit)$.

**Conclusion**. D'après $(\spadesuit)$, $(\clubsuit)$, et la caractérisation des sev supplémentaires : $\mathbb{K}_3[X] = F \oplus G$.

**Exercice 43. — (Sev supplémentaires dans $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$).**

Dans $E = \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, on considère $F$ le sev des matrices de $E$ dont la somme des coefficients est nulle, et $G = \mathrm{Vect}\,(\mathrm{I}_2)$.

Montrer que : $E = F \oplus G$.

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.

On obtient (par analyse-synthèse encore une fois) :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} (a-b-c-d)/2 & b \\ c & (d-a-b-c)/2 \end{pmatrix}}_{\in F} + \underbrace{\frac{a+b+c+d}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\in G}$$

On a donc établi que :

$$\forall\, A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}),\ \exists\,(M,N) \in F \times G, \quad A = M + N$$

Autrement dit : $\mathrm{M}_2(\mathbb{R}) = F + G \qquad (\spadesuit)$.

Par ailleurs, si $A$ appartient à $F \cap G$, alors il existe $\lambda$ tel que $A = \lambda I_2$ (puisque $A$ est dans $G$) ; et $2\lambda = 0$ (puisque $A$ appartient à $F$). On en déduit que $A = 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}$.

Par conséquent : $F \cap G = \left\{0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}\right\} \qquad (\clubsuit)$.

**Conclusion**. D'après $(\spadesuit)$, $(\clubsuit)$, et la caractérisation des sev supplémentaires : $\mathrm{M}_2(\mathbb{R}) = F \oplus G$.

**Exercice 44. — (Sev supplémentaires dans $\mathscr{C}\,([0;\pi]\,,\mathbb{R})$).**

Soit $E = \mathscr{C}\,([0;\pi]\,,\mathbb{R})$. On considère les deux sev de $E$ suivants :

$$F = \mathrm{Vect}\,(\cos,\sin) \qquad \text{et} \qquad G = \left\{f \in E, \quad f\,(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0\right\}.$$

Montrer que $F$ et $G$ sont supplémentaires dans $E$.

On procède par analyse-synthèse : soit $h \in E$. Supposons qu'il existe $f \in F$ et $g \in G$ telle que $h = f + g$.

Alors, par définition de $F$, il existe deux réels $a$ et $b$ tels que :

$$h = a\cos + b\sin + g$$

En outre, puisque $g$ appartient à $G$, on a $f\,(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. Par suite :

$$\begin{cases} h(0) = a \\ h\left(\frac{\pi}{2}\right) = b \end{cases}$$

Ce qui conduit à :

$$h = \underbrace{\left(h(0)\cos + h\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin\right)}_{f\in F} + \underbrace{\left(h - h(0)\cos - h\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin\right)}_{g\in G}$$

On vient donc d'établir que :

$$\forall\, h \in E,\ \exists\,(f,g) \in F \times G, \quad h = f + g$$

Par conséquent : $E = F + G \qquad (\spadesuit)$

Considérons à présent $f \in F \cap G$. Alors il existe deux réels $a$ et $b$ tels que $f = a\cos + b\sin$ (car $f \in F$), et $a = b = 0$ puisque $f(0) = f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$. D'où : $f = 0_E$.

Par conséquent : $F \cap G = \{0_E\} \qquad (\clubsuit)$

**Conclusion**. D'après $(\spadesuit)$, $(\clubsuit)$ et la caractérisation des sev supplémentaires : $E = F \oplus G$.

**Exercice 45.** — **(Supplémentaires et projection)**. On considère le $\mathbb{R}$-ev $E = \mathscr{C}([0;1], \mathbb{R})$ des fonctions continues sur $[0;1]$ et à valeurs réelles. Dans $E$, on considère le sev $F$ des fonctions constantes et $G$ le sev des fonctions continues et d'intégrale nulle sur $[0;1]$.

1/ Après vous être convaincu que $F$ et $G$ sont effectivement des sev de $E$, établir que $F$ et $G$ sont supplémentaires dans $E$.

D'une part $F = \text{Vect}(1)$, et d'autre part on vérifie facilement que les axiomes (SEV1,2,3) sont vérifiés pour $G$ (essentiellement par linéarité de l'intégrale) : $F$ et $G$ sont donc effectivement des sev de $E$.

On raisonne par analyse synthèse pour montrer qu'ils sont supplémentaires dans $E$.

**Analyse** : soit $\varphi \in E$. Supposons qu'il existe deux fonctions $f$ et $g$ dans $E$ telles que : $\varphi = f + g$. Alors il existe un scalaire $C$ tel que : $\varphi = C + g$. Puisque de plus la fonction $g$ appartient à $G$, on a : $C = \displaystyle\int_0^1 \varphi$.

Il s'ensuit que : $\varphi = \underbrace{\displaystyle\int_0^1 \varphi}_{=f} + \underbrace{\left(\varphi - \displaystyle\int_0^1 \varphi\right)}_{=g}$.

**Synthèse** : soit $\varphi \in E$. On pose : $f = \displaystyle\int_0^1 \varphi$ et $g = \varphi - \displaystyle\int_0^1 \varphi$. Les fonctions $f$ et $g$ appartiennent clairement à $F$ et $G$ respectivement, et on a : $\varphi = f + g$.

On en déduit déjà que : $E = F + G \qquad (\spadesuit)$.

Par ailleurs, si $h$ est une fonction appartenant à $F \cap G$, alors $h$ est une fonction constante et d'intégrale nulle sur $[0,1]$ : $h$ est donc identiquement nulle sur $[0,1]$.

Ce qui prouve que : $F \cap G = \{0_E\} \qquad (\clubsuit)$.

**Conclusion**. D'après $(\spadesuit)$, $(\clubsuit)$, et la caractérisation des sev supplémentaires : $\mathscr{C}([0;1], \mathbb{R}) = F \bigoplus G$.

2/ Déterminer le projeté de la fonction carrée $(x \longmapsto x^2)$ sur $G$ parallèlement à $F$.

Notons $\varphi$ la fonction carrée. On a : $\displaystyle\int_0^1 x^2 \, \mathrm{d}x = \frac{1}{3}$.

On écrit alors, d'après la question précédente :

$$\forall x \in [0,1], \; \varphi(x) = \underbrace{\frac{1}{3}}_{\in F} + \underbrace{\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)}_{\in G}$$

En notant $f$ la fonction constante égale à $\dfrac{1}{3}$, et $g$ la fonction $x \longmapsto \left(x^2 - \dfrac{1}{3}\right)$, on a écrit ci-dessus

$$\varphi = f + g \qquad \text{avec} \qquad f \in F \text{ et } g \in G^{\dagger\dagger}$$

On en déduit que le projeté de la fonction carrée ($x \longmapsto x^2$) sur $G$ parallèlement à $F$ est la fonction $g$.

**Conclusion**. Le projeté de la fonction carrée $\varphi$ sur $G$ parallèlement à $F$ est la fonction :

$$p_G(\varphi) = g \text{ avec } \forall\, x \in [0,1]\,,\; g(x) = \left(x^2 - \frac{1}{3}\right)$$

**Exercice 46. — (Sev supplémentaires et projection).**

Dans cet exercice, $E$ désigne le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}_2[X]$, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1/ Dans $E$ on considère $F = \text{Vect}\,(X^2 + X + 1,\; 5X + 2)$, et $G = \text{Vect}(X^2 - X)$.

On pourra noter $P_1 = X^2 + X + 1$ ; $P_2 = 5X + 2$ ; $P_3 = X^2 - X$.

Etablir que : $\qquad E = F \bigoplus G$.

Raisonnons par analyse-synthèse pour établir que $E = F + G$. Soit $P = aX^2 + bX + c \in E$. On suppose que $P$ s'écrit comme la somme d'un polynôme de $F$ et d'un polynôme de $G$, càd qu'il existe trois scalaires $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ tels que :

$$P = \alpha P_1 + \beta P_2 + \gamma P_3$$

soit :

$$aX^2 + bX + c = \alpha(X^2 + X + 1) + \beta(5X + 2) + \gamma(X^2 - X)$$

Par identification, on en déduit que :

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha + \gamma = a \\ \alpha + 5\beta - \gamma = b \\ \alpha + 2\beta = c \end{array}\right. \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b-a \\ c-a \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b-a \\ 3a+2b-5c \end{pmatrix} \iff \left\{\begin{array}{l} \alpha = -2a - 2b + 5c \\ \beta = a + b - 2c \\ \gamma = 3a + 2b - 5c \end{array}\right.$$

En résumé, on a établi que :

$$aX^2 + bX + c = (-2a - 2b + 5c)\,(X^2 + X + 1) + (a + b - 2c)\,(5X + 2) + (3a + 2b - 5c)\,(X^2 - X)$$

Par suite, pour tout polynôme $P = aX^2 + bX + c$ dans $\mathbb{K}_2[X]$, il existe deux polynômes $Q \in F$ et $R \in G$ tels que :

$$P = Q + R \quad \text{avec } Q = (-2a - 2b + 5c)\,(X^2 + X + 1) + (a + b - 2c)\,(5X + 2) \quad \text{et}$$
$$R = (3a + 2b - 5c)\,(X^2 - X)\ (\spadesuit)$$

On a donc prouvé que : $E = F + G$.

Par ailleurs, si $P \in F \cap G$, alors il existe trois scalaires $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ tels que :

††. Pour reprendre la terminologie du cours, $f$ est la composante suivant $F$ de $\varphi$, et $g$ la composante suivant $G$ de $\varphi$.

$$P = \alpha(X^2 + X + 1) + \beta(5X + 2) \text{ et } P = \gamma(X^2 - X)$$

Par identification on en déduit que :

$$\begin{cases} \alpha = \gamma \\ \alpha + 5\beta = -\gamma \\ \alpha + 2\beta = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

Par suite : $F \cap G = \left\{0_{\mathbb{K}_2[X]}\right\}$.

**Conclusion**. Puisque $E = F + G$ et $F \cap G = \left\{0_{\mathbb{K}_2[X]}\right\}$, on peut conclure : $E = F \oplus G$.

2/ Déterminer le projeté de $X$ sur $F$ parallèlement à $G$.

Puisque $F$ et $G$ sont supplémentaires dans $E$ d'après la question précédente :

$$\forall\, P \in \mathbb{K}_2[X],\ \exists!\ (Q, R) \in F \times G, \quad P = Q + R$$

Avec les notations du cours, le projeté de $P$ sur $F$ (*resp.* sur $G$) parallèlement à $G$ (*resp.* $F$) est :

$$p_F(P) = Q \qquad (\textit{resp. } p_G(P) = R)$$

En particulier, d'après la formule (♠) donnant l'expression de $Q$ en fonction des coefficients du polynôme $P$, on a :

$p_F(X) = -2(X^2 + X + 1) + (5X + 2)$ (puisque $a = c = 0$ et $b = 1$). D'où : $p_F(X) = -2X^2 + 3X$

**Conclusion**. Le projeté de $X$ sur $F$ parallèlement à $G$ est $p_F(X) = -2X^2 + 3X$.

**Exercice 47.** — **(Sev supplémentaires et projection, bis)**.

Dans cet exercice, $E$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.

Dans $E$, on considère $F = \mathrm{Vect}\,(E_{21})$, et $G$ la partie de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices dont la somme des coefficients est nulle.

1/ Etablir que $G$ est un sev de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, et en déterminer une famille génératrice.

Soit $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned} A \in G &\iff \exists\,(a, b, c) \in \mathbb{R}^3,\ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a-b-c \end{pmatrix} \\ &\iff \exists\,(a, b, c) \in \mathbb{R}^3,\ A = a\,(E_{11} - E_{22}) + b\,(E_{12} - E_{22}) + c\,(E_{21} - E_{22}) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$A \in G \iff A \in \mathrm{Vect}\,((E_{11} - E_{22}), (E_{12} - E_{22}), (E_{21} - E_{22}))$$

En d'autres termes : $G = \mathrm{Vect}\,((E_{11} - E_{22}), (E_{12} - E_{22}), (E_{21} - E_{22}))$.

**Conclusion**. $G$ est un sev de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, et une famille génératrice en est :

$$\{(E_{11} - E_{22}), (E_{12} - E_{22}), (E_{21} - E_{22})\}.$$

2/ Etablir que : $E = F \bigoplus G$.

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Supposons que $A$ s'écrive comme somme d'une matrice dans $F$ et d'une matrice dans $G$. Sous cette hypothèse, il existe quatre réels $x$, $y$, $z$ et $t$ tels que :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \underbrace{xE_{21}}_{\in F} + \underbrace{y\,(E_{11} - E_{22}) + z\,(E_{12} - E_{22}) + t\,(E_{21} - E_{22})}_{\in G}$$

Soit :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x+z \\ t & -y-z-t \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = a \\ t = c \\ z = -a-c-d \\ x = a+b+c+d \end{cases}$$

En d'autres termes, on a établi que :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}_{=A\in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})} = \underbrace{(a+b+c+d)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\in F} + \underbrace{a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + (-a-c-d)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{\in G}$$

Cette décomposition étant valide pour une matrice $A$ arbitraire, on en déduit que : $\mathrm{M}_2(\mathbb{R}) = F + G$.

Il est trivial que $F \cap G = \left\{0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}\right\}$.

**Conclusion**. Puisque $\mathrm{M}_2(\mathbb{R}) = F + G$ et $F \cap G = \left\{0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}\right\}$, on peut conclure : $\mathrm{M}_2(\mathbb{R}) = F \oplus G$.

3/ Déterminer le projeté de la matrice $\mathrm{I}_2$ sur $F$ parallèlement à $G$ ; puis l'image de $\mathrm{I}_2$ par la symétrie par rapport à $F$ parallèlement à $G$.

D'après la question précédente, on a (en prenant $a = c = 1$, et $b = d = 0$) :

$$\mathrm{I}_2 = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=p_F(\mathrm{I}_2)} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=p_G(\mathrm{I}_2)}$$

On en déduit que le projeté de la matrice $\mathrm{I}_2$ sur $F$ parallèlement à $G$ est : $p_F(\mathrm{I}_2) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On en déduit également que l'image de $\mathrm{I}_2$ par la symétrie par rapport à $F$ parallèlement à $G$ est :

$$s_F(\mathrm{I}_2) = p_F(\mathrm{I}_2) - p_G(\mathrm{I}_2) \qquad \text{soit :} \qquad s_F(\mathrm{I}_2) = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$