Chapitre 21 — "L'essentiel" sur les fractions rationnelles

Motivation. L'objectif de ce document est de présenter la notion de fraction rationnelle (cours, méthodes, exos d'applications) en allant à l'essentiel, autant que possible.

Les fractions rationnelles sont aux polynômes,

ce que les nombres rationnels sont aux entiers relatifs.

I - Généralités

Définition (fraction rationnelle) — Une **fraction rationnelle** à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un quotient $\dfrac{P}{Q}$ de deux polynômes P et Q de $\mathbb{K}[X]$, avec Q non nul.

La fraction rationnelle $\dfrac{P}{Q}$ est **irréductible** lorsque $P \wedge Q = 1$.

Remarque — La définition de fraction rationnelle est analogue à la définition de nombre rationnel (un nombre rationnel est le quotient de deux entiers a et b, avec b non nul).

Notation — On note :

$$\mathbb{K}\left(X\right) = \left\{ \frac{P}{Q}\ ,\ (P, Q) \in\ \mathbb{K}[X],\ Q \neq 0 \right\}$$

Pour reprendre l'analogie précédente, $\mathbb{K}(X)$ joue pour $\mathbb{K}[X]$, le même rôle que $\mathbb{Q}$ pour $\mathbb{Z}$.

Exemples — $\dfrac{1}{X}$, $\dfrac{2X^3-1}{X^2+1}$, $\dfrac{X-4}{X\left(X-1\right)\left(X-2\right)}$ sont des fractions rationnelles.

Il faut bien remarquer que les fractions rationnelles **ne sont pas des fonctions**, mais juste des "écritures formelles" (comme pour les polynômes au début de ce chapitre). On pourra dans un second temps leur associer des fonctions (comme on l'a fait pour les polynômes).

On peut définir la **somme et le produit** de deux fractions rationnelles $\dfrac{P_1}{Q_1}$ et $\dfrac{P_2}{Q_2}$:

$$\frac{P_1}{Q_1} + \frac{P_2}{Q_2} = \frac{P_1Q_2 + P_2Q1}{Q_1Q_2} \qquad \text{et} \qquad \frac{P_1}{Q_1} \times \frac{P_2}{Q_2} = \frac{P_1P_2}{Q_1Q_2}$$

Définition (degré d'une fraction rationnelle) — Le degré de la fraction rationnelle $F = \dfrac{P}{Q}$ est l'entier relatif noté $\deg(F)$ défini en posant :

$$\deg(F) = \deg(P) - \deg(Q)$$

Exemples — $\deg\left(\dfrac{1}{X}\right) = -1$, $\deg\left(\dfrac{2X^3-1}{X^2+1}\right) = 1$, $\deg\left(\dfrac{X-4}{X\left(X-1\right)\left(X-2\right)}\right) = -2$.

Le degré dans $\mathbb{K}(X)$ possède les mêmes propriétés que le degré dans l'anneau des polynômes, comme le précise l'énoncé ci-dessous.

Propriétés (du degré d'une fraction rationnelle) — Soient F_1 et F_2 deux fractions rationnelles. Alors

1/ $\deg(F_1F_2) = \deg(F_1) + \deg(F_2)$ 2/ $\deg(F_1 + F_2) \leqslant \max(\deg(F_1), \deg(F_2))$

Pour en finir avec les généralités :

Propriété — $(\mathbb{K}(X), +, \times)$ est un corps.

Le corps $\mathbb{K}(X)$ est appelé le **corps des fractions rationnelles** à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Remarque — Pour reprendre une analogie déjà évoquée : l'anneau des entiers $(\mathbb{Z}, +, \times)$ est commutatif et intègre, mais n'est pas un corps. En revanche $(\mathbb{Q}, +, \times)$ est un corps.

De la même façon, l'anneau des polynômes $(\mathbb{K}[X], +, \times)$ est commutatif et intègre, mais n'est pas un corps. En revanche $(\mathbb{K}(X), +, \times)$ est un corps.

II - Zéros et pôles d'une fraction rationnelle

Définition (zéro et pôle) — Soit $F = \dfrac{P}{Q}$ une fraction rationnelle (sous forme irréductible).

- Un **zéro de** F est une racine de P
- Un **pôle de** F est une racine de Q

Plus précisément, si m est un entier naturel et α un scalaire, on dit que :

- α est un **zéro d'ordre** m **de** F si α est une racine de multiplicité m de P
- α est un **pôle d'ordre** m **de** F si α est une racine de multiplicité m de Q

Exemples — On pose

$$F = \frac{(X-2)^3 (X-1)X^2}{(X-5)(X-6)^2(X-7)^4}$$

Dans cet exemple : 2 est un 0 d'ordre 3 de F ; 1 est un 0 **simple** (càd d'ordre 1) de F ; 0 est un zéro **double** (càd d'ordre 2) de F

5 est un **pôle simple** (càd d'ordre 1) de F ; 6 est un **pôle double** (càd d'ordre 2) de F ; 7 est un pôle d'ordre 4 de F

III - Partie entière et partie polaire d'une fraction rationnelle

Théorème — Soit $F \in \mathbb{K}(X)$.

Il existe un unique couple (E, G) avec $E \in \mathbb{K}[X]$, et $G \in \mathbb{K}(X)$ de degré < 0 tel que : $F = E + G$

Idée de la preuve — Soit $F = \dfrac{P}{Q} \in \mathbb{K}[X]$. D'après le théorème de la division euclidienne, il existe un unique couple $(E, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que : $P = QE + R$, et $\deg(R) < \deg(Q)$. On en déduit que :

$$\frac{P}{Q} = \frac{QE + R}{Q} = E + \frac{R}{Q} \text{ avec } \deg(R) - \deg(Q) < 0$$

Fin de l'idée de la preuve.

Définitions — Le polynôme E du théorème précédent est alors appelé **partie entière** de F, et la fraction rationnelle G **partie polaire** de F.

Exemple naïf — Posons $F = \dfrac{X^3 + 2}{X^2}$. On a : $F = X + \dfrac{2}{X^2}$.

La partie entière de F est X, et sa partie polaire est $\dfrac{2}{X^2}$.

Remarque — Pour reprendre l'analogie entre le corps des nombres rationnels $\mathbb{Q}$, et celui des fractions rationnelles $\mathbb{K}(X)$: le nombre rationnel $\dfrac{7}{2} = 3,5$ admet pour partie entière 3. Ce qui jouerait le rôle de sa partie polaire serait égal à $0,5$:

$$\frac{7}{2} = \frac{2 \times 3 + 1}{2} = 3 + \frac{1}{2}$$

IV - Décomposition en éléments simples

Le point de vue choisi ici est délibérément pratique ; les théorèmes généraux assurant l'existence et l'unicité d'une décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle de $\mathbb{C}(X)$ ou de $\mathbb{R}(X)$ peuvent être trouvés dans le cours (pdf sur le site). Nous ne développerons ici que les méthodes permettant de calculer les décompositions en éléments simples dans les cas usuels.

Méthodes (décomposition en éléments simples) — Soit $F = \dfrac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$.

On suppose que $\deg(F) < 0$.

➢ **1er cas – F ne possède que des pôles simples**. Alors : $Q = (X - \alpha_1) \cdots (X - \alpha_n)$, les α_i étant dans $\mathbb{K}$. Dans ce cas, il existe n scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que :

$$F = \frac{P}{(X - \alpha_1) \cdots (X - \alpha_n)} = \frac{\lambda_1}{X - \alpha_1} + \cdots + \frac{\lambda_n}{X - \alpha_n}$$

➢ **2ème cas – F possède un pôle double (α_1), et des pôles simples ($\alpha_2, \ldots, \alpha_n$).**

Alors : $Q = (X - \alpha_1)^2 (X - \alpha_2) \cdots (X - \alpha_n)$. Dans ce cas, il existe $(n + 1)$ scalaires $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ tels que :

$$F = \frac{P}{(X - \alpha_1)^2 (X - \alpha_2) \cdots (X - \alpha_n)} = \frac{\lambda_0}{X - \alpha_1} + \frac{\lambda_1}{(X - \alpha_1)^2} + \frac{\lambda_2}{X - \alpha_2} + \cdots + \frac{\lambda_n}{X - \alpha_n}$$

Remarque — Les méthodes précédentes peuvent être généralisées, à des fractions rationnelles admettant plusieurs pôles doubles, ou encore à des pôles de multiplicité 3 ou plus. Mais les deux cas évoqués précédemment sont de très loin ceux d'usage le plus courant, que ce soit en maths, ou lorsque l'on cherche à résoudre une équa diff via la transformée de Laplace (en S2i).

V - Décomposition en éléments simples : exemples pratiques

Exemple 1 - Tous les pôles sont simples - Méthode d'identification

On note $F = \dfrac{1}{X(X+1)}$. D'après ce qui précède, il existe deux scalaires a et b tels que : $F = \dfrac{a}{X} + \dfrac{b}{X+1}$.

Or : $\dfrac{a}{X} + \dfrac{b}{X+1} = \dfrac{(a+b)X+a}{X(X+1)}$. D'où : $\begin{cases} a+b=0 \\ a=1 \end{cases} \iff \begin{cases} b=-1 \\ a=1 \end{cases}$.

Conclusion. La décomposition en éléments simples de F est : $\dfrac{1}{X(X+1)} = \dfrac{1}{X} - \dfrac{1}{X+1}$

Exemple 2 - Tous les pôles sont simples - Méthode de "multiplication/évaluation"

On note $F = \dfrac{1}{X(X+1)(X-1)(X-2)}$.

Dans ce cas, il existe quatre scalaires a, b, c et d tels que : $F = \dfrac{a}{X} + \dfrac{b}{X+1} + \dfrac{c}{X-1} + \dfrac{d}{X-2} \qquad (\spadesuit)$.

La méthode d'identification ici serait un peu lourde (résolution d'un système 4x4 pour conclure).

➢ **Déterminons** a. En multipliant tous les termes de ($\spadesuit$) par X, on obtient :

$$XF = a + \frac{bX}{X+1} + \frac{cX}{X-1} + \frac{dX}{X-2} \quad \text{soit}$$
$$\frac{1}{(X+1)(X-1)(X-2)} = a + \frac{bX}{X+1} + \frac{cX}{X-1} + \frac{dX}{X-2} \qquad (\clubsuit)$$

L'évaluation de ($\clubsuit$) en 0 donne : $a = \dfrac{1}{2}$.

➢ **Déterminons** b. En multipliant tous les termes de ($\spadesuit$) par $X+1$, on obtient :

$$(X+1)F = \frac{a(X+1)}{X} + b + \frac{c(X+1)}{X-1} + \frac{d(X+1)}{X-2}$$
$$\text{soit} \quad \frac{1}{X(X-1)(X-2)} = \frac{a(X+1)}{X} + b + \frac{c(X+1)}{X-1} + \frac{d(X+1)}{X-2} \qquad (\clubsuit)$$

L'évaluation de ($\clubsuit$) en -1 donne : $b = -\dfrac{1}{6}$.

➢ **Déterminons** c. En multipliant tous les termes de ($\spadesuit$) par $X-1$, on obtient :

$$(X-1)F = \frac{a(X-1)}{X} + \frac{b(X-1)}{X+1} + c + \frac{d(X-1)}{X-2}$$
$$\text{soit} \quad \frac{1}{X(X+1)(X-2)} = \frac{a(X-1)}{X} + \frac{b(X-1)}{X+1} + c + \frac{d(X-1)}{X-2} \qquad (\clubsuit)$$

L'évaluation de ($\clubsuit$) en 1 donne : $c = -\dfrac{1}{2}$.

➢ **Déterminons** d. En multipliant tous les termes de (♠) par $X-2$, on obtient :

$$(X-2)F = \frac{a(X-2)}{X} + \frac{b(X-2)}{X+1} + \frac{c(X-2)}{X-1} + d$$

$$\text{soit } \frac{1}{X\,(X+1)\,(X-1)} = \frac{a(X-2)}{X} + \frac{b(X-2)}{X+1} + \frac{c(X-2)}{X-1} + d \qquad (\clubsuit)$$

L'évaluation de (♣) en 2 donne : $d = \dfrac{1}{6}$.

Conclusion. La décomposition en éléments simples de F est :

$$\frac{1}{X(X+1)\,(X-1)\,(X-2)} = \frac{1}{2}\frac{1}{X} - \frac{1}{6}\frac{1}{X+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{X-1} + \frac{1}{6}\frac{1}{X-2}$$

Exemple 3 - Tous les pôles sont simples - La "formule miracle"

Supposons que $F = \dfrac{P}{Q}$ n'ait que des pôles simples : $F = \dfrac{P}{(X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_n)} = \dfrac{\lambda_1}{X-\alpha_1} + \cdots + \dfrac{\lambda_n}{X-\alpha_n}$

Alors, pour tout $i \in [\![\, 1, n \,]\!]$ on a : $\lambda_i = \dfrac{P(\alpha_i)}{Q'(\alpha_i)}$.[1]

Application : $F = \dfrac{1}{X(X-1)(X+1)}$. Il existe trois scalaires a, b et c tels que : $F = \dfrac{a}{X} + \dfrac{b}{X-1} + \dfrac{c}{X+1}$.

On a : $Q = X^3 - X$. Donc : $Q' = 3X^2 - 1$.

D'après la formule : $a = \dfrac{P(0)}{Q'(0)} = -1$; $b = \dfrac{P(1)}{Q'(1)} = \dfrac{1}{2}$; $c = \dfrac{P(-1)}{Q'(-1)} = \dfrac{1}{2}$.

Conclusion. La décomposition en éléments simples de F est :

$$\frac{1}{X(X-1)(X+1)} = -\frac{1}{X} + \frac{1}{2}\frac{1}{X-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{X+1}$$

Exemple 4 - Au moins un pôle est double - Multiplication/évaluation et limite

On note $F = \dfrac{1}{X(X-1)^2}$. Dans ce cas, F possède un pôle simple (qui est 0), et un pôle double (qui est 1).

Il existe 3 scalaires a, b et c tque : $\dfrac{1}{X(X-1)^2} = \dfrac{a}{X} + \dfrac{b}{X-1} + \dfrac{c}{(X-1)^2} \qquad (\spadesuit)$

On détermine a par multiplication par X, et évaluation en 0 : $a = 1$

On détermine c par multiplication par $(X-1)^2$, et évaluation en 1 : $c = 1$

Ce qui change est le moyen de déterminer b : on commence par multiplier (♠) par $(X-1)$:

$$\frac{1}{X(X-1)} = \frac{a(X-1)}{X} + b + \frac{c}{X-1} \qquad (\clubsuit)$$

Puis on passe à la limite en $+\infty$. Puisque

$$\lim_{X\to+\infty} \frac{1}{X(X-1)} = 0\,;\ \lim_{X\to+\infty} \frac{a(X-1)}{X} = a \text{ et } \lim_{X\to+\infty} \frac{c}{X-1} = 0$$

on déduit de (♣) que : $0 = a + b$. D'où : $b = -1$.

Conclusion. La décomposition en éléments simples de F est : $\dfrac{1}{X(X-1)^2} = \dfrac{1}{X} + \dfrac{-1}{X-1} + \dfrac{1}{(X-1)^2}$

1. Evidemment, cette formule se démontre, et la preuve est dans le pdf du cours.