

Chapitre 20 : Espaces vectoriels et applications linéaires

1 – Espaces vectoriels

2 – Sous-espaces vectoriels

3 – Combinaisons linéaires (finies), familles génératrices

4 – Applications linéaires

Définition : une application $f : E \longrightarrow F$ entre deux \mathbb{K} -ev est **linéaire** si :

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall (\vec{u}, \vec{v}) \in E^2, f(\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}) = \lambda f(\vec{u}) + \mu f(\vec{v})$$

Un **endomorphisme** de E est une application linéaire de E dans lui-même (“ $F = E$ ”).

Propriétés g^{ales}. $\mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{L}(E)$ sont des \mathbb{K} -ev ; $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ est un anneau (non-commutatif et non-intègre en général). A titre culturel en Sup : $(\mathcal{L}(E), +, \cdot, \circ)$ est une \mathbb{K} -algèbre.

5 – Ker et Im : noyau et image d’une application linéaire

Définition : soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle **noyau** de f et on note $\ker f$ le sous-ensemble de E suivant :

$$\ker f = \left\{ \vec{v} \in E, f(\vec{v}) = \vec{0}_F \right\}$$

L’**image** de f , notée $\text{Im } f$, est la partie de F suivante :

$$\text{Im } f = \left\{ \vec{w} \in F, \exists \vec{v} \in E, f(\vec{v}) = \vec{w} \right\}$$

Propriété. $\ker f$ est un sev de E et $\text{Im } f$ est un sev de F .

Propriété : soient E et F deux \mathbb{K} -ev, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On suppose qu’il existe une famille $(\vec{v}_i)_{i \in [1, n]}$ génératrice de E , c’est-à-dire une famille de vecteurs de E tels que $E = \text{Vect} \left((\vec{v}_i)_{i \in [1, n]} \right)$. Alors :

$$\text{Im } f = \text{Vect} \left((f(\vec{v}_i))_{i \in [1, n]} \right)$$

Théorème : soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors : f est injective SSI $\ker f = \left\{ \vec{0}_E \right\}$; et f est surjective SSI $\text{Im } f = F$.

6 – Isomorphismes et automorphismes

Définition : soient E et F deux \mathbb{K} -ev. On appelle **isomorphisme** entre E et F (*resp.* **automorphisme** de E) une application linéaire $f : E \longrightarrow F$ bijective (*resp.* un endomorphisme de E bijectif). Les ev E et F sont **isomorphes** s’il existe un isomorphisme entre E et F .

Notation : $\text{GL}(E)$ est l’ensemble des automorphismes de E .

Propriétés : la composée de deux iso(auto)morphismes est un iso(auto)morphisme. Si f est un isomorphisme entre E et F , alors f^{-1} est un isomorphisme entre F et E .

Corollaire : $(\text{GL}(E), \circ)$ est un groupe, appelé **groupe linéaire** de E .

7 – Sommes de sev et sev supplémentaires

a – Sommes de sev

Définition : soient F et G deux sev d’un même \mathbb{K} -ev E . La **somme** de F et G , notée $F + G$ est :

$$F + G = \left\{ \vec{v} \in E, \exists (\vec{f}, \vec{g}) \in F \times G, \vec{v} = \vec{f} + \vec{g} \right\}$$

Propriété. $F + G$ est un sev de E .

b – Sous-espaces vectoriels supplémentaires

Définition : deux sev F et G d’un même \mathbb{K} -ev E sont **supplémentaires (dans E)** lorsque tout vecteur de E s’écrit de manière unique (à l’ordre près) comme somme d’un vecteur de F et d’un vecteur de G , soit :

$$\forall \vec{v} \in E, \exists ! (\vec{f}, \vec{g}) \in F \times G, \vec{v} = \vec{f} + \vec{g}.$$

Dans ce cas, on note : $E = F \oplus G$, et on dit que E est la **somme directe** de F et de G .

Propriété (caractérisation des sev supplémentaires) : deux sev F et G de E sont supplémentaires SSI $F \cap G = \left\{ \vec{0} \right\}$ et $E = F + G$.

c – Projections et symétries

Définition : soit E un \mathbb{K} -ev E ; F et G deux sev supplémentaires de E ($E = F \oplus G$). Ainsi : $\forall \vec{v} \in E, \exists! \left(\vec{f}, \vec{g} \right) \in F \times G, \vec{v} = \vec{f} + \vec{g}$.

Avec ces hypothèses et notations, on appelle :

- **projection sur F parallèlement à G** l'application p_F de E dans E définie en posant $p_F(\vec{v}) = \vec{f}$;
- **symétrie par rapport à F parallèlement à G** l'application s_F de E dans E définie en posant $s_F(\vec{v}) = \vec{f} - \vec{g}$

Propriétés.

- 1) p_F est un endomorphisme de E , et $p_F^2 = p_F$. En outre : $\ker(p_F) = G$ et $\text{Im}(p_F) = F$.
- 2) s_F est un automorphisme de E ($s_F \in \text{GL}(E)$), et $s_F^2 = \text{id}_E$ (s_F est une involution).

Remarques. $\text{id}_E = p_F + p_G$, et $\ker(\text{id}_E - p_F) = \text{Im}(p_F)$

QUESTIONS DE COURS

- **Propriété** : si F et G sont deux sev de E , alors $F \cap G$ est un sev de E .
- **Propriété** : si $f : E \rightarrow F$ est linéaire, alors $f\left(\vec{0}_E\right) = \vec{0}_F$.
- **Propriété** : si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $\ker f$ est un sev de E et $\text{Im} f$ est un sev de F .
- **Théorème** : soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. f est injective SSI $\ker f = \left\{ \vec{0} \right\}$.
- **Propriété** : soient E et F deux \mathbb{K} -ev, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On suppose qu'il existe une famille $(\vec{v}_i)_{i \in [1, n]}$ génératrice de E , c'est-à-dire une famille de vecteurs de E tels que $E = \text{Vect}\left((\vec{v}_i)_{i \in [1, n]}\right)$. Alors : $\text{Im} f = \text{Vect}\left((f(\vec{v}_i))_{i \in [1, n]}\right)$

8 – Projecteurs

Définition : soit E un \mathbb{K} -ev. Un **projecteur** de E est un endomorphisme p de E tel que $p^2 = p$.

Propriétés. Soit $p \in \mathcal{L}(E)$. Si p est un projecteur, alors :

- 1) $\text{id}_E - p$ est un projecteur
- 2) $\text{Im}(p) = \ker(\text{id}_E - p)$ et $\ker(p) = \text{Im}(\text{id}_E - p)$

Propriété (caractérisation des projecteurs). Soit $p \in \mathcal{L}(E)$. LASSE :

- 1) p est un projecteur
- 2) $\text{id}_E - p$ est un projecteur
- 3) $E = \ker(p) \oplus \ker(\text{id}_E - p)$

Théorème. Soient E un \mathbb{K} -ev, et $p \in \mathcal{L}(E)$. Si p est un projecteur de E , alors p est la projection sur $\text{Im}(p)$ parallèlement à $\ker(p)$.

- **Propriété** : deux sev F et G de E sont supplémentaires SSI $F \cap G = \left\{ \vec{0} \right\}$ et $E = F + G$.
- **Propriétés (des projections)** : soient F et G deux sev supplémentaires de E . On note p_F la projection sur F parallèlement à G . Alors p_F est un endomorphisme de E tel que $p_F^2 = p_F$. En outre : $\ker(p_F) = G$ et $\text{Im}(p_F) = F$.
- **Propriété.** Soit $p \in \mathcal{L}(E)$. LASSE :
 - 1) p est un projecteur
 - 2) $E = \ker(p) \oplus \ker(\text{id}_E - p)$