

COLLE 22 – QUESTIONS DE COURS

QUESTION DE COURS 1 — Propriété. Soient E un $\mathbb{K}$ -ev, F et G deux sev de E . Alors $F \cap G$ est un sev de E .

PREUVE. On vérifie les axiomes “(SEV_x)”.

(SEV1) F et G sont deux parties de E car F et G sont deux sev de E , donc $(F \cap G) \subset E$.

(SEV2) $\vec{0}_E \in F$ et $\vec{0}_E \in G$ car F et G sont deux sev de E . D’où : $\vec{0}_E \in (F \cap G)$.

(SEV3) Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $(F \cap G)$, et soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$.

Alors : $(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) \in F$ car $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dans F , et que F est un sev de E .

Et : $(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) \in G$ car $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dans G , et que G est un sev de E .

Il s’ensuit que $(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) \in (F \cap G)$.

On a ainsi prouvé que : $[\vec{u} \in (F \cap G) \text{ et } \vec{v} \in (F \cap G)] \implies [\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \in (F \cap G)]$

Ce qui signifie que $(F \cap G)$ est stable par combinaison linéaire.

CONCLUSION. $F \cap G$ est une partie de E (SEV1), qui contient le vecteur nul de E (SEV2), et qui est stable par combinaison linéaire (SEV3). Donc $F \cap G$ est un sev de E .

Remarque. En général, $F \cup G$ n’est pas un sev de E . Donner un exemple illustrant cette affirmation ; puis retrouver la CNS pour que $F \cup G$ soit un sev de E .

QUESTION DE COURS 2 — Propriété. Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -ev, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors : $f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$.

PREUVE. D’une part : $f(\vec{0}_E + \vec{0}_E) = f(\vec{0}_E)$. D’autre part : $f(\vec{0}_E + \vec{0}_E) = f(\vec{0}_E) + f(\vec{0}_E)$ (f étant linéaire)

On en déduit que : $f(\vec{0}_E) + f(\vec{0}_E) = f(\vec{0}_E)$, puis la conclusion.

CONCLUSION. $[f \in \mathcal{L}(E, F)] \implies [f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F]$

QUESTION DE COURS 3 — Propriété : si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $\ker f$ est un sev de E et $\text{Im } f$ est un sev de F .

PREUVE. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire.

Montrons que $\ker f$ est un sev de E . Par définition, $\ker f$ est une partie de E (SEV1). Le vecteur nul y appartient (SEV2), puisque $f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$ pour toute $f \in \mathcal{L}(E, F)$ (QC2).

Il reste à établir que $\ker f$ est stable par combinaison linéaire. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans $\ker f$, et λ et μ deux scalaires.

Alors : $f(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = \lambda f(\vec{u}) + \mu f(\vec{v}) = \lambda\vec{0}_F + \mu\vec{0}_F = \vec{0}_F$; la première égalité provenant de la définition d’application linéaire, et la seconde du fait que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dans le noyau de f par hypothèse.

Par conséquent : $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \in \ker f$, et $\ker f$ est donc stable par combinaison linéaire.

CONCLUSION 1. $\ker f$ est une partie de E , contenant $\vec{0}_E$, et stable par combinaison linéaire. Par suite, $\ker f$ est un sev de E .

Montrons que $\text{Im} f$ est un sev de F . Par définition, $\text{Im} f$ est une partie de F (SEV1). Le vecteur nul (de F) y appartient (SEV2), puisque $\vec{0}_F = f(\vec{0}_E)$ pour toute $f \in \mathcal{L}(E, F)$ (QC2 encore).

Il reste à établir que $\text{Im} f$ est stable par combinaison linéaire. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans $\text{Im} f$, et λ et μ deux scalaires.

Par hypothèse, il existe deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ de E tels que $f(\vec{a}) = \vec{u}$ et $f(\vec{b}) = \vec{v}$. Par conséquent :

$$f(\lambda \vec{a} + \mu \vec{b}) = \lambda f(\vec{a}) + \mu f(\vec{b}) = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}; \text{ la première égalité provenant de la}$$

définition d'application linéaire, et la seconde des définitions respectives des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Il s'ensuit que $\lambda \vec{u} + \mu \vec{v} \in \text{Im} f$ (puisque'il admet pour antécédent $\lambda \vec{a} + \mu \vec{b}$). Ainsi $\text{Im} f$ est stable par combinaison linéaire (SEV3).

CONCLUSION 2. $\text{Im} f$ est une partie de F , contenant $\vec{0}_F$, et stable par combinaison linéaire. Par suite, $\text{Im} f$ est un sev de F .

QUESTION DE COURS 4 — Théorème. Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -ev. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Alors : f est injective SSI $\ker f = \{\vec{0}_E\}$.

PREUVE. On raisonne par double implication, pour faire preuve d'originalité.

► Supposons f injective. On a déjà $\{\vec{0}_E\} \subset \ker f$ puisque $\ker f$ est un sev de E . Réciproquement, soit $\vec{v}$ un vecteur de $\ker f$. Alors $f(\vec{v}) = \vec{0}_F$. Comme par ailleurs f est linéaire, on a aussi : $f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$. Donc $f(\vec{v}) = f(\vec{0}_E)$, et on en déduit $\vec{v} = \vec{0}_E$ par injectivité de f . Ce qui assure que $\ker f = \{\vec{0}_E\}$.

En résumé : $[f \text{ injective}] \implies [\ker f = \{\vec{0}_E\}]$.

► Réciproquement, supposons $\ker f = \{\vec{0}_E\}$. Soient $\vec{v}$ et $\vec{w}$ deux vecteurs de E tels que $f(\vec{v}) = f(\vec{w})$. Alors : $f(\vec{v}) - f(\vec{w}) = \vec{0}_F$, d'où par linéarité de f : $f(\vec{v} - \vec{w}) = \vec{0}_F$. Par suite, $\vec{v} - \vec{w} \in \ker f$, et puisque le noyau de f est réduit au vecteur nul par hypothèse, on en déduit que $\vec{v} - \vec{w} = \vec{0}_E$, d'où : $\vec{v} = \vec{w}$. On a ainsi établi que $[f(\vec{v}) = f(\vec{w})] \implies [\vec{v} = \vec{w}]$, ce qui prouve l'injectivité de f .

Par suite : $[\ker f = \{\vec{0}_E\}] \implies [f \text{ injective}]$.

CONCLUSION. $[\ker f = \{\vec{0}_E\}] \iff [f \text{ injective}]$

QUESTION DE COURS 5 — Propriété : soient E et F deux $\mathbb{K}$ -ev, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On suppose qu'il existe une famille $(\vec{v}_i)_{i \in [1, n]}$ génératrice de E , càd une famille de vecteurs de E tels que $E = \text{Vect}((\vec{v}_i)_{i \in [1, n]})$. Alors :

$$\text{Im} f = \text{Vect}((f(\vec{v}_i))_{i \in [1, n]})$$

PREUVE. ► Montrons l'inclusion : $\text{Im} f \subset \text{Vect}((f(\vec{v}_i))_{i \in [1, n]})$. Soit $\vec{V} \in \text{Im} f$. Il existe un vecteur $\vec{u}$ de E tel que : $f(\vec{u}) = \vec{V}$.

Puisque la famille $(\vec{v}_i)_{i \in [1, n]}$ est génératrice de E : $\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, $\vec{u} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{v}_i$.

Ainsi : $\vec{V} = f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{v}_i\right)$ et par linéarité de f : $\vec{V} = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(\vec{v}_i)$, d'où : $\vec{V} \in \text{Vect}((f(\vec{v}_i))_{i \in [1, n]})$.

Conclusion 1 : $\text{Im} f \subset \text{Vect}((f(\vec{v}_i))_{i \in [1, n]})$

► Montrons l'inclusion : $\text{Vect} \left((f(\vec{v}_i))_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \right) \subset \text{Im} f$. Soit $\vec{V} \in \text{Vect} \left((f(\vec{v}_i))_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \right)$.

Alors : $\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, $\vec{V} = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(\vec{v}_i)$.

Par linéarité de f , on a : $\vec{V} = f \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{v}_i \right)$, d'où $\vec{V} \in \text{Im} f$. Conclusion 2 : $\text{Vect} \left((f(\vec{v}_i))_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \right) \subset \text{Im} f$

BILAN. $\text{Im} f = \text{Vect} \left((f(\vec{v}_i))_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \right)$

QUESTION DE COURS 6 — Propriété (caractérisation des sev supplémentaires) : deux sev F et G de E sont supplémentaires SSI $F \cap G = \{\vec{0}\}$ et $E = F + G$.

PREUVE. ► Sens direct : supposons que F et G soient supplémentaires dans E (càd $E = F \oplus G$). En particulier, on a déjà $E = F + G$.

Montrons que $F \cap G = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{v} \in F \cap G$. Alors le vecteur $\vec{v}$ peut s'écrire $\vec{v} = \underbrace{\vec{v}}_{\in F} + \underbrace{\vec{0}}_{\in G}$ et

$\vec{v} = \underbrace{\vec{0}}_{\in F} + \underbrace{\vec{v}}_{\in G}$. Les sev F et G étant supplémentaires dans E , on en déduit que : $\vec{v} = \vec{0}$. Par conséquent :

$F \cap G = \{\vec{0}\}$. Conclusion 1 : $[E = F \oplus G] \implies [F \cap G = \{\vec{0}\} \text{ et } E = F + G] (\spadesuit)$.

► Réciproquement : supposons que $F \cap G = \{\vec{0}\}$ et $E = F + G$, et considérons un vecteur arbitraire $\vec{v}$ de E . La seconde hypothèse permet d'affirmer qu'il existe $\vec{f} \in F$ et $\vec{g} \in G$ tels que : $\vec{v} = \vec{f} + \vec{g}$.

Il reste à établir l'unicité de cette écriture. Supposons qu'il existe $\vec{f}$ et $\vec{f}'$ dans F , et $\vec{g}$ et $\vec{g}'$ dans G tels que : $\vec{v} = \vec{f} + \vec{g}$ et $\vec{v} = \vec{f}' + \vec{g}'$. Alors : $\vec{f} - \vec{f}' = \vec{g}' - \vec{g}$. On en déduit que $\vec{f} - \vec{f}' \in F \cap G$. Par hypothèse, ceci implique que : $\vec{f} - \vec{f}' = \vec{0}$. D'où $\vec{f} = \vec{f}'$ et donc $\vec{g} = \vec{g}'$.

Par suite : $\forall \vec{v} \in E$, $\exists! (\vec{f}, \vec{g}) \in F \times G$, $\vec{v} = \vec{f} + \vec{g}$. Autrement dit : $E = F \oplus G$.

Conclusion 2 : $[F \cap G = \{\vec{0}\} \text{ et } E = F + G] \implies [E = F \oplus G] (\clubsuit)$.

SYNTHÈSE. D'après $(\spadesuit)$ et $(\clubsuit)$: $[F \cap G = \{\vec{0}\} \text{ et } E = F + G] \iff [E = F \oplus G]$

QUESTION DE COURS 7 — Propriétés (des projections) : soient F et G deux sev supplémentaires de E . On note p_F la projection sur F parallèlement à G . Alors p_F est un endomorphisme de E tel que $p_F^2 = p_F$. En outre : $\ker(p_F) = G$ et $\text{Im}(p_F) = F$.

PREUVE. Soient F et G deux sev supplémentaires de E (càd tels que $E = F \oplus G$). Par définition (de sev supplémentaires) : $\forall \vec{v} \in E$, $\exists! (\vec{f}, \vec{g}) \in F \times G$, $\vec{v} = \vec{f} + \vec{g}$. On rappelle alors que la projection sur F parallèlement à G est l'application p_F de E dans E définie en posant $p_F(\vec{v}) = \vec{f}$.

► Montrons la linéarité de p_F . Soient $\vec{v}$ et $\vec{w}$ deux vecteurs de E , et soient λ et μ deux scalaires. Puisque $E = F \oplus G$, il existe deux vecteurs $\vec{f}$ et $\vec{f}'$ dans F , et deux vecteurs $\vec{g}$ et $\vec{g}'$ dans G uniques tels que : $\vec{v} = \vec{f} + \vec{g}$ et $\vec{w} = \vec{f}' + \vec{g}'$. Notons déjà que : $\vec{f} = p_F(\vec{v})$ et $\vec{f}' = p_F(\vec{w})$ ($\sharp$).

En outre : $\lambda \vec{v} + \mu \vec{w} = \underbrace{\lambda \vec{f} + \mu \vec{f}'}_{\in F} + \underbrace{\lambda \vec{g} + \mu \vec{g}'}_{\in G}$. D'où : $p_F(\lambda \vec{v} + \mu \vec{w}) = \lambda \vec{f} + \mu \vec{f}'$ (b).

On déduit de (b) et de ($\sharp$) que : $p_F(\lambda \vec{v} + \mu \vec{w}) = \lambda p_F(\vec{v}) + \mu p_F(\vec{w})$. Ce qui prouve que p_F est linéaire.

D'où $p_F \in \mathcal{L}(E)$

► Montrons que $p_F^2 = p_F$. Avec les notations précédemment introduites : $p_F(\vec{v}) = \vec{f}$.

Et puisque $\vec{f} = \underbrace{\vec{f}}_{\in F} + \underbrace{\vec{0}_E}_{\in G}$, on a : $p_F^2(\vec{v}) = p_F(\vec{f}) = \vec{f}$. Il s'ensuit que : $\forall \vec{v} \in E, p_F^2(\vec{v}) = p_F(\vec{v})$.

Donc : $\boxed{p_F^2 = p_F}$.

► Montrons que $\ker(p_F) = G$. Par double inclusion : si $\vec{g} \in G$, alors $\vec{g} = \underbrace{\vec{0}_E}_{\in F} + \underbrace{\vec{g}}_{\in G}$, d'où $p_F(\vec{g}) = \vec{0}$,

càd : $\vec{g} \in \ker(p_F)$. Ainsi : $G \subset \ker(p_F)$.

Réciproquement, si $\vec{v} = \vec{f} + \vec{g}$ (toujours avec les mêmes notations) est dans $\ker(p_F)$, alors $\vec{f} = \vec{0}_E$, d'où $\vec{v} = \vec{g}$. Par suite : $\vec{v} \in G$, ce qui prouve l'inclusion : $\ker(p_F) \subset G$. Finalement : $\ker(p_F) = G$.

► Montrons que $\text{Im}(p_F) = F$. Il résulte de la définition que $\text{Im}(p_F) \subset F$. Établissons l'inclusion réciproque. Pour tout $\vec{f} \in F$, on a : $\vec{f} = \vec{f} + \vec{0}_E$, d'où : $\vec{f} = p_F(\vec{f})$. Par conséquent : $\vec{f} \in \text{Im}(p_F)$, ce qui prouve que : $F \subset \text{Im}(p_F)$.

Finalement : $\text{Im}(p_F) = F$.

QUESTION DE COURS 8 — Propriété. Soit $p \in \mathcal{L}(E)$. On a :

$$(p \text{ est un projecteur de } E) \iff (E = \ker(p) \oplus \ker(\text{id}_E - p))$$

PREUVE. ► Montrons que $(p \text{ est un projecteur de } E) \implies (E = \ker(p) \oplus \ker(\text{id}_E - p))$.

Supposons que p est un projecteur de E .

Montrons que $\ker(p) \cap \ker(\text{id}_E - p) = \{\vec{0}_E\}$.

Supposons que $\vec{w} \in \ker(p) \cap \ker(\text{id}_E - p)$, alors $p(\vec{w}) = \vec{0}_E$ (puisque $\vec{w} \in \ker(p)$) et $p(\vec{w}) = \vec{w}$ (puisque $\vec{w} \in \ker(\text{id}_E - p)$). D'où $\vec{w} = \vec{0}_E$. Il s'ensuit que : $\ker(p) \cap \ker(\text{id}_E - p) = \{\vec{0}_E\}$ (b).

Montrons que $E = \ker(p) + \ker(\text{id}_E - p)$ par analyse-synthèse.

Analyse. Soit $\vec{v} \in E$. Supposons qu'il existe $(\vec{f}, \vec{g}) \in \ker(p) \times \ker(\text{id}_E - p)$ tel que : $\vec{v} = \vec{f} + \vec{g}$.

Alors : $p(\vec{v}) = p(\vec{f}) + p(\vec{g}) = \vec{0}_E + \vec{g}$ (la première égalité provenant de la linéarité de p , et la seconde des hypothèses faites sur $\vec{f}$ et $\vec{g}$).

Ainsi : $\vec{g} = p(\vec{v})$. Il s'ensuit que : $\vec{f} = \vec{v} - p(\vec{v})$.

Synthèse. Soit $\vec{v} \in E$. On écrit judicieusement : $\vec{v} = \underbrace{(\vec{v} - p(\vec{v}))}_{\vec{f}} + \underbrace{p(\vec{v})}_{\vec{g}}$

Avec ces notations, on a :

$$\triangleright p(\vec{f}) = p(\vec{v} - p(\vec{v})) = p(\vec{v}) - p^2(\vec{v}) = p(\vec{v}) - p(\vec{v}) = \vec{0}.^* \text{ D'où : } \vec{v} - p(\vec{v}) \in \ker(p) \text{ } (\heartsuit).$$

$$\triangleright p(\vec{g}) = p(p(\vec{v})) = p(\vec{v}) \text{ (puisque } p \text{ est un projecteur). D'où } p(\vec{v}) \in \ker(\text{id}_E - p) \text{ } (\clubsuit).$$

$$\triangleright \text{Enfin, il est immédiat que } \vec{v} = (\vec{v} - p(\vec{v})) + p(\vec{v}) \text{ } (\spadesuit)$$

On déduit de $(\spadesuit)$, $(\heartsuit)$ et $(\clubsuit)$ que : $E = \ker(p) + \ker(\text{id}_E - p)$ $(\diamond)$.

D'après $(\diamond)$ et (b) : $E = \ker(p) \oplus \ker(\text{id}_E - p)$.

CONCLUSION 1. $(p \text{ est un projecteur de } E) \implies (E = \ker(p) \oplus \ker(\text{id}_E - p))$

*. La première égalité provenant de la linéarité de p , et la seconde de l'hypothèse selon laquelle p est un projecteur.

► Réciproquement, montrons que : $(E = \ker(p) \oplus \ker(\text{id}_E - p)) \implies (p \text{ est un projecteur de } E)$.

Soit $\vec{v}$ un élément de E . Par hypothèse : $\exists ! \left(\vec{f}, \vec{g} \right) \in \ker(p) \times \ker(\text{id}_E - p)$, $\vec{v} = \vec{f} + \vec{g}$.

Muni des hypothèses faites sur $\vec{f}$ et $\vec{g}$, on effectue sans difficulté les calculs suivants.

D'abord : $p(\vec{v}) = p(\vec{f}) + p(\vec{g})$, d'où : $p(\vec{v}) = \vec{g}$.

Puis : $p^2(\vec{v}) = p(\vec{g}) = \vec{g}$, c-à-d : $p^2(\vec{v}) = \vec{g}$.

Par conséquent : $\forall \vec{v} \in E$, $p^2(\vec{v}) = p(\vec{v})$. Donc : $p^2 = p$, ce qui signifie que l'endomorphisme p est un projecteur.

CONCLUSION 2. $(E = \ker(p) \oplus \ker(\text{id}_E - p)) \implies (p \text{ est un projecteur de } E)$

BILAN. Soit $p \in \mathcal{L}(E)$. On a : $(p \text{ est un projecteur de } E) \iff (E = \ker(p) \oplus \ker(\text{id}_E - p))$

MÉTHODES ESSENTIELLES DU CHAPITRE 20

1. Montrer que “quelquechose” est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E :

- a. En utilisant les axiomes “(SEVx)” (exo 1 de la banque)
- b. En utilisant “un Vect” (exo 2 de la banque)
- c. En utilisant “un ker” (exo 3 de la banque)

2. Déterminer une famille génératrice d'un sev (répétition du point 1.b, exo 4 de la banque)

3. Montrer qu'une application est linéaire (ou est un endomorphisme) (exo 5 de la banque)

4. Déterminer le noyau d'une application linéaire (résolution de $f(\vec{v}) = \vec{0}$, exo 6 de la banque)

5. Déterminer l'image d'une application linéaire

(en utilisant : $f(\text{Vect}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)) = \text{Vect}(f(\vec{v}_1), \dots, f(\vec{v}_n))$, exo 7 de la banque)

6. Montrer qu'une application linéaire est un isomorphisme/automorphisme (exo 8 de la banque)

7. Montrer que deux sev sont supplémentaires dans un ev E (exo 9 de la banque)

BANQUE D'EXERCICES

EXERCICE 1 — On note $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{C})$ le $\mathbb{C}$ -espace vectoriel des fonctions continues sur $[0, 1]$ à valeurs complexes.

Montrer que $F = \left\{ f \in E, \int_0^1 f = 0 \right\}$ est un sev de E .

EXERCICE 2 — Dans $E = \mathbb{R}_5[X]$, on considère l'ensemble F des polynômes admettant (-2) comme racine de multiplicité au moins égale à 3.

Montrer que F est un sev de E .

EXERCICE 3 — Soit $E = M_n(\mathbb{R})$, et soit $A \in E$.

On considère l'ensemble F des matrices de E commutant avec A , c-à-d : $F = \text{COM}(A) = \{M \in E, MA = AM\}$.

Montrer que F est un sev de E .

EXERCICE 4 — On pose $E = M_{2,3}(\mathbb{R})$. Soit F l'ensemble des matrices de E telles que la somme des coefficients de la deuxième ligne soit égale au double de la somme des coefficients de la première ligne.

Montrer que F est un sev de E , et en déterminer une famille génératrice.

EXERCICE 5 — Montrer que l'application $f : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

$$P \longmapsto P - X^2 P''$$

EXERCICE 6 — Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et soit $\omega \in \mathbb{R}_+^*$. On considère l'application :

$$f : E \longrightarrow E$$

$$y \longmapsto y'' + \omega^2 y$$

On admet que f est un endomorphisme de E . Déterminer son noyau.

EXERCICE 7 — On considère l'application $f : M_2(\mathbb{K}) \longrightarrow M_2(\mathbb{K})$

$$M \longmapsto M - M^T$$

On admet que $f \in \mathcal{L}(M_2(\mathbb{K}))$. Montrer que $\text{Im } f = A_2(\mathbb{K})$.

EXERCICE 8 — On considère l'application $f : M_2(\mathbb{K}) \longrightarrow M_2(\mathbb{K})$

$$M \longmapsto M - \text{tr}(M) I_2$$

On admet que $f \in \mathcal{L}(M_2(\mathbb{K}))$. Montrer que f est un automorphisme de $M_2(\mathbb{K})$.

EXERCICE 9 — Dans $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on considère les sev $F = \{f \in E, f(0) = 0\}$ et $G = \text{Vect}(\cos)$.

Etablir que : $E = F \oplus G$.

BANQUE D'EXERCICES - CORRIGÉS

EXERCICE 1 — On note $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{C})$ le $\mathbb{C}$ -espace vectoriel des fonctions continues sur $[0, 1]$ à valeurs complexes.

Montrer que $F = \left\{ f \in E, \int_0^1 f = 0 \right\}$ est un sev de E .

D'après l'énoncé F est une partie de E (SEV1), et la fonction identiquement nulle sur $[0, 1]$ (qui est $\vec{0}_E$) appartient clairement à F (SEV2).

Soient f et g dans F , et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$.

Par linéarité de l'intégrale et par hypothèse : $\int (\lambda f + \mu g) = \lambda \int f + \mu \int g = 0$. D'où : $(\lambda f + \mu g) \in F$.

On a ainsi prouvé que : $[f \in F \text{ et } g \in F] \implies [\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2, \lambda f + \mu g \in F]$

Ce qui signifie que F est stable par combinaison linéaire (SEV3).

Conclusion. F est une partie de E (SEV1), qui contient le vecteur nul de E (SEV2), et qui est stable par combinaison linéaire (SEV3). Donc F est un sev de E .

EXERCICE 2 — Dans $E = \mathbb{R}_5[X]$, on considère l'ensemble F des polynômes admettant (-2) comme racine de multiplicité au moins égale à 3.

Montrer que F est un sev de E .

D'après la formule de Taylor dans $\mathbb{R}_5[X] : \forall P \in \mathbb{R}_5[X], P = \sum_{k=0}^5 \frac{P^{(k)}(-2)}{k!} (X+2)^k$

Par ailleurs, d'après le cours : (-2) est racine de P de multiplicité au moins égale à 3 SSI $P(-2) = P'(-2) = P''(-2) = 0$.

Il s'ensuit que P appartient à F SSI il existe 3 réels a, b et c tels que : $P = a(X+2)^3 + b(X+2)^4 + c(X+2)^5$

Conclusion. $F = \text{Vect} \left((X+2)^3, (X+2)^4, (X+2)^5 \right)$

EXERCICE 3 — Soit $E = M_n(\mathbb{R})$, et soit $A \in E$.

On considère l'ensemble F des matrices de E commutant avec A , càd : $F = \text{COM}(A) = \{M \in E, MA = AM\}$.

Montrer que F est un sev de E .

Observons que : $MA = AM \iff MA - AM = 0_{M_n(\mathbb{R})}$.

Cette remarquable observation nous conduit à introduire l'application : $f : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$

$$M \longmapsto MA - AM$$

Soient $(M, N) \in M_n(\mathbb{R})^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. On a :

$$f(\lambda M + \mu N) = (\lambda M + \mu N)A - A(\lambda M + \mu N) = \lambda MA + \mu NA - \lambda AM - \mu AN = \lambda(MA - AM) + \mu(NA - AN)$$

Finalement : $f(\lambda M + \mu N) = \lambda f(M) + \mu f(N)$. Ce qui prouve la linéarité de f .

Cette vérification faite, il est clair que : $\ker f = F$.

Conclusion. F est un sev, en tant que noyau d'une application linéaire.

EXERCICE 4 — On pose $E = M_{2,3}(\mathbb{R})$. Soit F l'ensemble des matrices de E telles que la somme des coefficients de la deuxième ligne soit égale au double de la somme des coefficients de la première ligne.

Montrer que F est un sev de E , et en déterminer une famille génératrice.

Soit $M \in E$. Par un calcul aisé : $M \in F \iff \exists (a, b, c, d, e) \in \mathbb{R}^5, M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & 2(a+b+c) - d - e \end{pmatrix}$

D'où : $M \in F \iff \exists (a, b, c, d, e) \in \mathbb{R}^5, M = a(E_{11} + 2E_{23}) + b(E_{12} + 2E_{23}) + c(E_{13} + 2E_{23}) + d(E_{21} - E_{23}) + e(E_{22} - E_{23})$

Conclusion. $F = \text{Vect}(E_{11} + 2E_{23}, E_{12} + 2E_{23}, E_{13} + 2E_{23}, E_{21} - E_{23}, E_{22} - E_{23})$

F est un sev de $M_{2,3}(\mathbb{R})$, et $\mathcal{F} = \{E_{11} + 2E_{23}, E_{12} + 2E_{23}, E_{13} + 2E_{23}, E_{21} - E_{23}, E_{22} - E_{23}\}$ est une famille génératrice de F .

EXERCICE 5 — Montrer que l'application $f : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

$$P \longmapsto P - X^2 P''$$

Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$, λ et μ deux réels. On a :

$$f(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P + \mu Q) - X^2(\lambda P + \mu Q)'' = \lambda P + \mu Q - \lambda X^2 P'' - \mu X^2 Q''$$

(essentiellement par linéarité de la dérivation).

Donc : $f(\lambda P + \mu Q) = \lambda(P - X^2 P'') + \mu(Q - X^2 Q'') = \lambda f(P) + \mu f(Q)$

En résumé, on a établi que : $\forall (P, Q) \in \mathbb{R}_2[X], \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, f(\lambda P + \mu Q) = \lambda f(P) + \mu f(Q)$

Conclusion. L'application f est une application linéaire de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}_2[X]$; c'est donc un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

EXERCICE 6 — Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et soit $\omega \in \mathbb{R}_+^*$. On considère l'application :

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow E \\ y &\longmapsto y'' + \omega^2 y \end{aligned}$$

On admet que f est un endomorphisme de E . Déterminer son noyau.

Le noyau de f est par définition :

$$\ker(f) = \{g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}), f(g) = 0_{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})}\} \iff \ker(f) = \{g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}), g'' + \omega^2 g = 0\}$$

Déterminer $\ker(f)$ revient donc à résoudre l'équation différentielle $g'' + \omega^2 g = 0$.

Or la solution générale de cette EDL2 archi-célèbre est :

$$\forall t \in \mathbb{R}, g(t) = \lambda \cos(\omega t) + \mu \sin(\omega t)$$

Notons, pour tout réel t : $f_1(t) = \cos(\omega t)$ et $f_2(t) = \sin(\omega t)$.

Avec ces notations : $g \in \ker f \iff g'' + \omega^2 g = 0 \iff \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, g = \lambda f_1 + \mu f_2 \iff g \in \text{Vect}(f_1, f_2)$

Conclusion. $\ker(f) = \text{Vect}(f_1, f_2)$

EXERCICE 7 — On considère l'application $f : M_2(\mathbb{K}) \longrightarrow M_2(\mathbb{K})$

$$M \longmapsto M - M^T$$

On admet que $f \in \mathcal{L}(M_2(\mathbb{K}))$. Montrer que $\text{Im } f = A_2(\mathbb{K})$.

D'après le cours : $M_2(\mathbb{K}) = \text{Vect}(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$

D'où, d'après le cours : $\text{Im } f = \text{Vect}(f(E_{11}), f(E_{12}), f(E_{21}), f(E_{22}))$

Des calculs sans difficultés donnent :

$$\text{Im } f = \text{Vect}(0_{M_2(\mathbb{K})}, E_{12} - E_{21}, E_{21} - E_{12}, 0_{M_2(\mathbb{K})}) \quad \text{Par suite : } \text{Im } f = \text{Vect}(E_{12} - E_{21})$$

Or $\text{Vect}(E_{12} - E_{21}) = A_2(\mathbb{K})$, puisqu'une matrice $M \in M_2(\mathbb{K})$ est antisymétrique SSI il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que : $M = \lambda(E_{12} - E_{21})$.

Conclusion. $\text{Im } f = \text{Vect}(E_{12} - E_{21}) = A_2(\mathbb{K})$

EXERCICE 8 — On considère l'application $f : M_2(\mathbb{K}) \longrightarrow M_2(\mathbb{K})$

$$M \longmapsto M - \text{tr}(M) I_2$$

On admet que $f \in \mathcal{L}(M_2(\mathbb{K}))$. Montrer que f est un automorphisme de $M_2(\mathbb{K})$.

Puisque l'on admet que f est linéaire, il suffit de prouver que f est bijective.

► **Injectivité de f .** Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{K})$. On a :

$$\begin{aligned} M \in \ker f &\iff f(M) = 0_{M_2(\mathbb{K})} \iff M - \text{tr}(M) I_2 = 0_{M_2(\mathbb{K})} \iff M = \text{tr}(M) I_2 \\ &\iff \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+d & 0 \\ 0 & a+d \end{pmatrix} \iff a = b = c = d = 0 \end{aligned}$$

En résumé : $M \in \ker f \iff M = 0_{M_2(\mathbb{K})}$. D'où : $\ker f = \{0_{M_2(\mathbb{K})}\}$. Donc f est injective (♠).

► **Surjectivité de f .** D'après le cours : $M_2(\mathbb{K}) = \text{Vect}(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$

D'où, d'après le cours : $\text{Im } f = \text{Vect}(f(E_{11}), f(E_{12}), f(E_{21}), f(E_{22}))$

Des calculs sans difficultés donnent :

$$\text{Im } f = \text{Vect}(-E_{22}, E_{12}, E_{21}, -E_{11}) = \text{Vect}(E_{22}, E_{12}, E_{21}, E_{11}) = M_2(\mathbb{K}) \quad \text{Donc } f \text{ est surjective.}$$

Conclusion. f est un endomorphisme bijectif de $M_2(\mathbb{K})$. C'est donc un automorphisme de $M_2(\mathbb{K})$.

EXERCICE 9 — Dans $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on considère les sev $F = \{f \in E, f(0) = 0\}$ et $G = \text{Vect}(\cos)$.

Etablir que : $E = F \oplus G$.

Soit $\varphi \in F \cap G$. Alors : $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \varphi = \lambda \cos$. Puisque $\varphi \in F$, on en déduit $\lambda = 0$, d'où $\varphi = \vec{0}_E$. Par suite : $F \cap G = \{\vec{0}_E\}$.

Montrons que $E = F + G$ par analyse-synthèse.

Soit $\varphi \in E$. En s'inspirant de l'exemple fait en cours (avec “exp” à la place de “cos”), on obtient la décomposition : $\varphi = \underbrace{(\varphi - \varphi(0) \cos)}_{\in F} + \underbrace{\varphi(0) \cos}_{\in G}$.[†]

Conclusion. $E = F \oplus G$

[†]. Cette partie est naturellement à détailler en colle.