Devoir surveillé n^{0}9

Mathématiques

Durée : 4 heures

CONSIGNES

- **Le sujet est composé d'un exercice et de deux problèmes, communs à tous les candidats.**
- **Tout matériel électronique est interdit.**
- **Les résultats doivent être soulignés ou encadrés.**

Barème approximatif :

- **Exercice 1 : 19pts (5+4+5+5)**
- **Problème 1 : 38pts (6+17+15)**
- **Problème 2 : 25pts (4+10+11)**

Exercice 1 — (Applications du cours).

Les questions de cet exercice sont complètement indépendantes.

1/ DPI dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$. On considère le polynôme :

$$P = (X^4 - X)(X^2 + X + 1)$$

a/ Déterminer les décompositions en polynômes irréductibles de P dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.

b/ Préciser les racines complexes de P, ainsi que leurs multiplicités respectives.

c/ Le polynôme P est-il scindé dans $\mathbb{R}$? Justifier très brièvement.

2/ DL$_5(0)$ de tan. L'objectif de cette question est de calculer le développement limité à l'ordre 5 de la fonction tangente en 0, en évitant un fastidieux calcul de dérivée 5-ème.

Tout au long de cette question, on pose : $I = [-1, 1]$. On pourra admettre que $\tan \in \mathscr{C}^\infty(I, \mathbb{R})$.

a/ Pour tout réel x de I, rappeler sans justification la formule donnant $\tan'(x)$ en fonction de $\tan(x)$.

b/ Justifier qu'il existe trois réels a_1, a_3 et a_5 (que l'on ne cherche pas à déterminer dans cette question) tels que :

$$\forall x \in I, \quad \tan(x) = a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + o\left(x^6\right)$$

c/ Déduire des questions a/ et b/ les valeurs de a_1, a_3 et a_5.

3/ Négligeabilité/Equivalence. Dans cette question, on note $E = \mathscr{C}^0\left(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}\right)$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}_+^*$ et à valeurs réelles.

On considère les parties de E suivantes :

$$F = \{f \in E,\ f(x) = o_{+\infty}(\mathrm{e}^x)\} \qquad \text{et} \qquad G = \{f \in E,\ f(x) \sim_{+\infty} \mathrm{e}^x\}$$

a/ Justifier que la fonction $f_1 = \sin$ appartient à F, et que la fonction $f_2 = \dfrac{2\mathrm{ch}^2}{\mathrm{sh}}$ appartient à G.

b/ Etablir que F est un sous-espace vectoriel de E, et que G n'en est pas un.

4/ Division euclidienne et linéarité. Dans cette question, B désigne un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré m (avec $m \in \mathbb{N}^*$). Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, on note $\widehat{P}$ le reste dans la division euclidienne de P par B. On définit ainsi une application :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}[X] &\longrightarrow \mathbb{R}_{m-1}[X] \\ P &\longmapsto \widehat{P} \end{aligned}$$

a/ Etablir que φ est linéaire.

b/ Déterminer $\ker \varphi$. L'application φ est-elle injective ?

—— Problème 1 — Développements limités et polynômes ——

Problématique. *L'objectif de ce problème est de déterminer le développement limité à un ordre quelconque d'une certaine fonction "non-usuelle". Pour y parvenir, l'énoncé propose un joli voyage à travers le programme de Sup : intégrales, suites, développements limités, récurrences doubles, sommes, dérivées d'ordre supérieur, et comme il est indiqué dans le titre, DL et polynômes : amusez-vous bien !*

Partie 1 - Somme de la série des inverses des factorielles

On considère les suites $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ et $(v_p)_{p\in\mathbb{N}}$ définies en posant :

$$\forall\, p \in \mathbb{N}, \quad u_p = \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} \qquad \text{et} \qquad v_p = u_p + \frac{1}{p!}\int_0^1 (1-t)^p \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t$$

1/ Soit $p \in \mathbb{N}$. A l'aide d'une intégration par parties, établir que $v_p = v_{p+1}$.

2/ En déduire que :

$$\forall\, p \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{e} - u_p = \frac{1}{p!}\int_0^1 (1-t)^p \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t$$

3/ En déduire que :

$$\forall\, p \in \mathbb{N}, \quad |\mathrm{e} - u_p| = \frac{\mathrm{e}}{p!}$$

4/ En déduire finalement la limite : $\displaystyle\lim_{p\longrightarrow+\infty}\left(\sum_{k=0}^{p}\frac{1}{k!}\right)$

Partie 2 - Dérivées successives et polynômes

On note $I = \,]-\infty, 1\,[$.

Jusqu'à la fin de ce problème, f désigne la fonction définie sur I en posant :

$$\forall\, x \in I, \quad f(x) = \frac{1}{1-x}\,\mathrm{e}^{1/(1-x)}$$

5/ Calculer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de f.

6/ Montrer par récurrence que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \exists\, P_n \in \mathbb{R}[X],\ \forall\, x \in I,\ f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{1-x}\right)\mathrm{e}^{1/(1-x)}$$

7/ Etablir que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad P_{n+1} = X^2\left(P_n + P_n'\right)$$

8/ Préciser les polynômes P_0, P_1, P_2 et P_3.*

∗. Indication : on a $P_0 = X$.

9/ Vérifier que la fonction f est solution sur I de l'équation différentielle :

$$(E) \qquad (1-x)^2\, y' = (2-x)\, y$$

10/ Etablir que pour tout réel x de I, et pour tout entier naturel n non nul on a :

$$(1-x)^2 f^{(n+1)}(x) - 2n(1-x)f^{(n)}(x) + n(n-1)f^{(n-1)}(x) = (2-x)f^{(n)}(x) - nf^{(n-1)}(x)$$

11/ Etablir que pour tout entier naturel n on a :

$$P_{n+1} = \left[(2n+1)X + X^2\right] P_n - n^2X^2P_{n-1}$$

12/ Etablir que pour tout entier naturel n, le polynôme P_n est unitaire et de degré $2n+1$.

Partie 3 - Développement limité de f à l'ordre n en 0

Pour tout entier naturel n, on pose $a_n = f^{(n)}(0)$.

13/ Pour tout entier naturel n, exprimer a_{n+1} en fonction de n, a_n et a_{n-1}.

14/ **Développement limité à l'ordre 4 en 0 de f.**

- **a**/ En utilisant la définition de P_n et la question 8, déterminer les valeurs de a_0, a_1, a_2 et a_3.
- **b**/ En déduire la valeur de a_4, puis le développement limité de f à l'ordre 4 en 0.

15/ Pour tout couple (n, p) d'entiers naturels, on pose :

$$S_p(n) = \sum_{i=0}^{p} \frac{(n+i)!}{(i!)^2}$$

- **a**/ Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Exprimer $S_p(0)$ et $S_p(1)$ en fonction de u_p et u_{p-1} (où $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ désigne la suite introduite dans la partie 1.
- **b**/ Prouver que les suites $(S_p(0))_{p\in\mathbb{N}}$ et $(S_p(1))_{p\in\mathbb{N}}$ convergent, et déterminer leurs limites.

16/ Soient n et p deux entiers naturels non nuls. Etablir que :

$$S_p(n+1) - (2n+2)S_p(n) + n^2S_p(n-1) = S_{p-1}(n) - S_p(n)$$

17/ En déduire, à l'aide d'une récurrence double, que la suite $(S_p(n))_{p\in\mathbb{N}}$ est convergente pour tout entier naturel n.

18/ Prouver que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad f^{(n)}(0) = \lim_{p\to+\infty} \sum_{i=0}^{p} \frac{(n+i)!}{(i!)^2}$$

Problème 2 — Un calcul de $\zeta(2)$

Problématique. *L'objectif de ce problème est de prouver un résultat maintes fois évoqué cette année, mais pas encore démontré : la somme des inverses des carrés des entiers*

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{N^2}$$

admet une limite finie lorsque N tend vers $+\infty$, et cette limite, notée $\zeta(2)$ (en référence à la fonction zêta de Riemann) est égale à $\dfrac{\pi^2}{6}$.

Partie 1 - La fonction cotangente

On note $D = \mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z}$, et pour tout réel $x \in D$, on appelle **cotangente** de x le réel

$$\operatorname{cotan}(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

1/ Etablir que la fonction cotan est impaire, et π-périodique.

2/ Dresser le tableau de variation de la fonction cotan sur $]0, \pi[$. En déduire le signe de cotan sur $]0, \pi[$.

Partie 2 - Un polynôme scindé dans $\mathbb{R}$ à racines simples

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$P_n = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left((X + \mathrm{i})^{2n+1} - (X - \mathrm{i})^{2n+1}\right)$$

Dans les questions ci-dessous, n désigne un entier naturel non nul arbitraire.

3/ A l'aide du binôme de Newton, établir que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad P_n = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \binom{2n+1}{2p+1} X^{2n-2p}$$

4/ En déduire le degré et le coefficient dominant de P_n.

5/ **Racines du polynôme P_n.**

a/ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z :

$$(z + \mathrm{i})^{2n+1} - (z - \mathrm{i})^{2n+1} = 0$$

b/ A l'aide de la question 2, établir que les réels de l'ensemble $\left\{\operatorname{cotan}\left(\dfrac{k\pi}{2n+1}\right),\ k \in [\![\, 1, n \,]\!]\right\}$ sont deux à deux distincts.

c/ En déduire que le polynôme P_n possède exactement $2n$ racines, toutes réelles et simples, que l'on explicitera.

6/ Déduire de ce qui précède que :

$$P_n = (2n + 1) \prod_{k=1}^{n} \left(X^2 - \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right)$$

Partie 3 - Valeur exacte de $\zeta(2)$

Dans les questions ci-dessous, n désigne un entier naturel non nul arbitraire.

8/ En comparant le coefficient de X^{2n-2} dans les expressions de P_n obtenues dans les questions 3 et 6, établir que :

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{n(2n-1)}{3}$$

9/ En déduire que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin^2\left(\dfrac{k\pi}{2n+1}\right)} = \frac{2n(n+1)}{3}$$

10/ **Un résultat intermédiaire**.

a/ Justifier très brièvement que : $\forall\, t \in [0, \pi/2\,[\,,\qquad \cos(t) \leqslant 1 \leqslant 1 + \tan^2(t)$

b/ Etablir que : $\forall\, x \in [0, \pi/2\,[\,,\qquad \sin(x) \leqslant x \leqslant \tan(x)$

11/ Déduire de ce qui précède un encadrement de :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(\dfrac{k\pi}{2n+1}\right)^2}$$

12/ En déduire la limite :

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

Fin