# Devoir surveillé n$^0$9

# Mathématiques

## Corrigé

**Exercice 1 — (Applications du cours).**

Les questions de cet exercice sont complètement indépendantes.

**1/ DPI dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$**. On considère le polynôme :

$$P = (X^4 - X)(X^2 + X + 1)$$

**a/** Déterminer les décompositions en polynômes irréductibles de $P$ dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.

On a : $P = (X^4 - X)(X^2 + X + 1) = X(X^3 - 1)(X^2 + X + 1)$

Selon les propriétés de $\mathbb{U}_3$, on en déduit la décomposition en polynômes irréductibles de $P$ dans $\mathbb{C}[X]$ :

$$P = X(X - 1)(X - \mathrm{j})^2 \left(X - \bar{\mathrm{j}}\right)^2$$

puis la décomposition en polynômes irréductibles de $P$ dans $\mathbb{R}[X]$ :

$$P = X(X - 1)(X^2 + X + 1)^2$$

**b/** Préciser les racines complexes de $P$, ainsi que leurs multiplicités respectives.

D'après la question précédente, les racines de $P$ sont $0$, $1$, $\mathrm{j}$ et $\bar{\mathrm{j}}$. Les deux premières sont simples, les deux autres sont doubles (de multiplicité exactement égale à 2).

**c/** Le polynôme $P$ est-il scindé dans $\mathbb{R}$ ? Justifier très brièvement.

D'après la question précédente, $P$ possède au moins une racine complexe non réelle (qui est $\mathrm{j}$).

**Conclusion.** $P$ n'est pas scindé dans $\mathbb{R}$.

**2/ DL$_5(0)$ de tan**. L'objectif de cette question est de calculer le développement limité à l'ordre 5 de la fonction tangente en 0, en évitant un fastidieux calcul de dérivée 5-ème.

Tout au long de cette question, on pose : $I = [-1, 1]$. On pourra admettre que $\tan \in \mathscr{C}^\infty(I, \mathbb{R})$.

**a/** Pour tout réel $x$ de $I$, rappeler sans justification la formule donnant $\tan'(x)$ en fonction de $\tan(x)$.

D'après le cours : $\forall x \in I,\ \tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$.

**b/** Justifier qu'il existe trois réels $a_1$, $a_3$ et $a_5$ (que l'on ne cherche pas à déterminer dans cette question) tels que :

$$\forall x \in I, \quad \tan(x) = a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + o\left(x^6\right)$$

Selon les théorèmes généraux, la fonction tan est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $I$ : elle admet donc un DL à tout ordre en 0, en particulier à l'ordre 6. En outre, la fonction tan étant impaire, tous les coefficients des puissances paires de $x$ sont nuls dans son DL en 0.

**Conclusion.** $\exists\,(a_1, a_3, a_5) \in \mathbb{R}^3,\ \forall x \in I, \quad \tan(x) = a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + o\left(x^6\right)$

**c/** Déduire des questions a/ et b/ les valeurs de $a_1$, $a_3$ et $a_5$.

D'après la question b/, on a :

$$\forall x \in I, \quad \tan'(x) = a_1 + 3a_3 x^2 + 5a_5 x^4 + o\left(x^5\right) \qquad (\spadesuit)$$

et :

$$\forall x \in I, \quad \tan^2(x) = T_5\left(\left(a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5\right)^2\right) + o\left(x^5\right) = a_1^2 x^2 + 2a_1 a_3 x^4 + o\left(x^5\right)$$

On en déduit que :

$$\forall x \in I, \quad 1 + \tan^2(x) = 1 + a_1^2 x^2 + 2a_1 a_3 x^4 + o\left(x^5\right) \qquad (\clubsuit)$$

D'après a/, ($\spadesuit$) et ($\clubsuit$) :

$$a_1 = 1\,; \quad 3a_3 = a_1^2\,; \quad 2a_1 a_3 = 5a_5 \quad \text{d'où :} \quad a_1 = 1\,;\ a_3 = \frac{1}{3}\,; \quad a_5 = \frac{2}{15}$$

**Conclusion.** $\forall x \in I, \quad \tan(x) = x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15} + o\left(x^5\right)$

**3/ Négligeabilité/Equivalence**. Dans cette question, on note $E = \mathscr{C}^0\left(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}\right)$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}_+^*$ et à valeurs réelles.

On considère les parties de $E$ suivantes :

$$F = \left\{f \in E,\ f(x) = o_{+\infty}\left(\mathrm{e}^x\right)\right\} \qquad \text{et} \qquad G = \left\{f \in E,\ f(x) \sim_{+\infty} \mathrm{e}^x\right\}$$

**a/** Justifier que la fonction $f_1 = \sin$ appartient à $F$, et que la fonction $f_2 = \dfrac{2\mathrm{ch}^2}{\mathrm{sh}}$ appartient à $G$.

D'une part $\lim\limits_{x\to} \dfrac{\sin(x)}{\mathrm{e}^x} = 0$ (produit d'une fonction bornée par une fonction de limite nulle). D'où : $\sin(x) = o_{+\infty}\left(\mathrm{e}^x\right)$. Donc $f_1 \in F$.

D'autre part, pour tout réel $x$ on a :

$$f_2(x) = \frac{2\mathrm{ch}^2(x)}{\mathrm{sh}(x)} = \frac{2\left(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\right)^2}{4} \times \frac{2}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}} = \frac{\mathrm{e}^{2x} + 2 + \mathrm{e}^{-2x}}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}$$

Puisque $2 = o_{+\infty}\left(\mathrm{e}^{2x}\right)$ et $\mathrm{e}^{-2x} = o_{+\infty}\left(\mathrm{e}^{2x}\right)$, on a : $\mathrm{e}^{2x} + 2 + \mathrm{e}^{-2x} \sim_{+\infty} \mathrm{e}^{2x}$

Et comme $\mathrm{e}^{-x} = o_{+\infty}\left(\mathrm{e}^x\right)$, on a : $\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} \sim_{+\infty} \mathrm{e}^x$

On en déduit que : $f_2(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x} + 2 + \mathrm{e}^{-2x}}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}} \sim_{+\infty} \mathrm{e}^x$. D'où $f_2 \in G$.

**Conclusion.** $f_1 \in F$ et $f_2 \in G$

**b/** Etablir que $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$, et que $G$ n'en est pas un.

$F$ est une partie de $E$ d'après l'énoncé (SEV1). La fonction identiquement nulle sur $\mathbb{R}$ (qui est le vecteur nul de $E$) est négligeable devant $\mathrm{e}^x$ au voisinage de $+\infty$, et appartient donc à $F$ (SEV2).

Montrons que $F$ est stable par combinaison linéaire. Soient $f$ et $g$ deux fonctions dans $F$, et soit $\lambda, \mu$ deux réels. On a au voisinage de $+\infty$ :

$$\lambda f(x) + \mu g(x) = \lambda o_{+\infty}(\mathrm{e}^x) + \mu o_{+\infty}(\mathrm{e}^x) \text{ d'où } \lambda f(x) + \mu g(x) = o_{+\infty}(\mathrm{e}^x)$$

Ce qui signifie que $\lambda f + \mu g$ appartient à $F$.
On a ainsi établi que : $[f \in F \text{ et } g \in F] \Longrightarrow [\forall\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \lambda f + \mu g \in F]$ (SEV3)
**Conclusion 1.** $F$ est une partie du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E$, contenant le vecteur nul de $E$ et stable par combinaison linéaire : c'est donc un sev de $E$.

Par ailleurs, la fonction identiquement nulle sur $\mathbb{R}$ n'est pas équivalente à $\mathrm{e}^x$ au voisinage de $+\infty$. Cette remarquable observation permet d'affirmer que $G$ n'est pas un sev de $E$ (l'axiome (SEV2) n'étant pas vérifié).

**Conclusion 2.** $G$ n'est pas un sev de $E$.

**4/** **Division euclidienne et linéarité**. Dans cette question, $B$ désigne un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré $m$ (avec $m \in \mathbb{N}^*$). Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, on note $\widehat{P}$ le reste dans la division euclidienne de $P$ par $B$. On définit ainsi une application :

$$\varphi : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}_{m-1}[X]$$
$$P \longmapsto \widehat{P}$$

**a/** Etablir que $\varphi$ est linéaire.

Soit $P_1$ et $P_2$ dans $\mathbb{R}[X]$, et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

D'après le théorème de la division euclidienne :

$\exists!\ (Q_1, R_1, Q_2, R_2) \in \mathbb{R}[X]^4,\ P_1 = BQ_1 + R_1$ et $P_2 = BQ_2 + R_2$

et $\deg(R_1) < \deg(B)$ et $\deg(R_2) < \deg(B)$

Avec les notations de l'énoncé :

$$P_1 = BQ_1 + \varphi(P_1) \text{ et } P_2 = BQ_2 + \varphi(P_2) \text{ et } \varphi(P_1) \in \mathbb{R}_{m-1}[X] \text{ et } \varphi(P_2) \in \mathbb{R}_{m-1}[X]$$

On en déduit que : $\lambda P_1 + \mu P_2 = \lambda BQ_1 + \mu BQ_2 + \lambda\varphi(P_1) + \mu\varphi(P_2)$
D'où :

$$\lambda P_1 + \mu P_2 = B\,(\lambda Q_1 + \mu Q_2) + \lambda\varphi(P_1) + \mu\varphi(P_2) \qquad (\spadesuit)$$

Posons : $R_3 = \lambda\varphi(P_1) + \mu\varphi(P_2)$. On peut noter que $\deg(R_3) \leqslant m - 1$ (car $\varphi(P_1)$ et $\varphi(P_2)$ sont dans $\mathbb{R}_{m-1}[X]$). Il s'ensuit, d'après ($\spadesuit$) et par unicité du couple (quotient, reste) dans le théorème de la division euclidienne que $\lambda\varphi(P_1) + \mu\varphi(P_2)$ est le reste dans la division euclidienne de $\lambda P_1 + \mu P_2$ par $Q$.

En d'autres termes : $\lambda\varphi(P_1) + \mu\varphi(P_2) = \varphi\,(\lambda P_1 + \mu P_2)$

Ainsi :

$$\forall\,(P_1,P_2)\in\mathbb{R}[X]^2,\ \forall\,(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2,\ \lambda\varphi(P_1)+\mu\varphi(P_2)=\varphi\left(\lambda P_1+\mu P_2\right)$$

**Conclusion.** L'application $\varphi$ est linéaire.

**b/** Déterminer $\ker\varphi$. L'application $\varphi$ est-elle injective ?

Soit $P\in\mathbb{R}[X]$ :

$$[P\in\ker\varphi]\iff\left[\varphi(P)=\tilde{0}\right]\iff[\text{le reste dans la D.E. de } P \text{ par } B \text{ est nul}]\iff[\ B|P\ ]$$

**Conclusion.** $\ker\varphi=B\mathbb{R}[X]$. Le polynôme $B$ étant non nul, on a : $\ker\varphi\neq\left\{\tilde{0}\right\}$. L'application $\varphi$ n'est donc pas injective.

## Problème 1 — Développements limités et polynômes

**Problématique**. *L'objectif de ce problème est de déterminer le développement limité à un ordre quelconque d'une certaine fonction "non-usuelle". Pour y parvenir, l'énoncé propose un joli voyage à travers le programme de Sup : intégrales, suites, développements limités, récurrences doubles, sommes, dérivées d'ordre supérieur, et comme il est indiqué dans le titre, DL et polynômes : amusez-vous bien !*

### Partie 1 - Somme de la série des inverses des factorielles

On considère les suites $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ et $(v_p)_{p\in\mathbb{N}}$ définies en posant :

$$\forall\,p\in\mathbb{N},\quad u_p=\sum_{k=0}^{p}\frac{1}{k!}\qquad\text{et}\qquad v_p=u_p+\frac{1}{p!}\int_0^1(1-t)^p\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$$

**1/** Soit $p\in\mathbb{N}$. A l'aide d'une intégration par parties, établir que $v_p=v_{p+1}$.

Soit $p\in\mathbb{N}$. Pour tout réel $t\in[0,1]$, posons $u(t)=-\dfrac{1}{p+1}(1-t)^{p+1}$ et $v(t)=\mathrm{e}^t$.

Selon les théorèmes généraux, les fonctions $u$ et $v$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$, et pour tout réel $t\in[0,1]$ on a $u'(t)=(1-t)^p$ et $v'(t)=\mathrm{e}^t$. D'après la formule d'intégration par parties on a :

$$\int_0^1(1-t)^p\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t=\left[-\frac{1}{p+1}(1-t)^{p+1}\mathrm{e}^t\right]_0^1+\frac{1}{p+1}\int_0^1(1-t)^{p+1}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{p+1}+\frac{1}{p+1}\int_0^1(1-t)^{p+1}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$$

On en déduit que :

$$v_p=u_p+\frac{1}{(p+1)!}+\frac{1}{(p+1)!}\int_0^1(1-t)^{p+1}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t=u_{p+1}+\frac{1}{(p+1)!}\int_0^1(1-t)^{p+1}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t=v_{p+1}$$

**Conclusion.** $\forall\,p\in\mathbb{N},\ v_{p+1}=v_p$

**2**/ En déduire que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{e} - u_p = \frac{1}{p!} \int_0^1 (1-t)^p \mathrm{e}^t \, \mathrm{d}t$$

D'après la question précédente, la suite $(v_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est constante, égale à $v_0 = u_0 + \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^t \, \mathrm{d}t = \mathrm{e}$.

En d'autres termes : $\forall p \in \mathbb{N}, \ v_p = \mathrm{e}$. La conclusion s'ensuit immédiatemment.

**Conclusion.** $\forall p \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{e} - u_p = \dfrac{1}{p!} \displaystyle\int_0^1 (1-t)^p \mathrm{e}^t \, \mathrm{d}t$

**3**/ En déduire que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad |\mathrm{e} - u_p| = \frac{\mathrm{e}}{p!}$$

Soit $p \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente, et par positivité de l'intégrale, on a déjà :

$$0 \leqslant \mathrm{e} - u_p \leqslant \frac{1}{p!} \int_0^1 (1-t)^p \mathrm{e}^t \, \mathrm{d}t$$

Une majoration sans finesse permet d'affirmer que la fonction $t \longmapsto (1-t)^p \mathrm{e}^t$ est majorée par e sur $[0, 1]$.

On en déduit que : $0 \leqslant \mathrm{e} - u_p \leqslant \dfrac{\mathrm{e}}{p!}$. **Conclusion.** $\forall p \in \mathbb{N}, \quad |\mathrm{e} - u_p| = \dfrac{\mathrm{e}}{p!}$

**4**/ En déduire finalement la limite : $\displaystyle\lim_{p\longrightarrow+\infty} \left( \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} \right)$

D'après la question précédente : $\displaystyle\lim_{p\longrightarrow+\infty} u_p = \mathrm{e}$. **Conclusion.** $\displaystyle\lim_{p\longrightarrow+\infty} \left( \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} \right) = \mathrm{e}$

## Partie 2 - Dérivées successives et polynômes

On note $I = ]-\infty, 1[$.

**Jusqu'à la fin de ce problème**, $f$ désigne la fonction définie sur $I$ en posant :

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \frac{1}{1-x} \, \mathrm{e}^{1/(1-x)}$$

**5**/ Calculer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $f$.

Soit $x$ un réel de $I$. Selon le cours, on a :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3) \quad \text{et} \quad \mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}
&\mathrm{e}^{1/(1-x)} = \mathrm{e}^{1+x+x^2+x^3+o(x^3)} \\
&\Longrightarrow \mathrm{e}^{1/(1-x)} = \mathrm{e} \times \mathrm{e}^{x+x^2+x^3+o(x^3)} \\
&\Longrightarrow \mathrm{e}^{1/(1-x)} = \mathrm{e} \times \left(1+x+x^2+x^3+\frac{(x+x^2+x^3)^2}{2}+\frac{(x+x^2+x^3)^3}{6}\right)+o(x^3) \\
&\Longrightarrow \mathrm{e}^{1/(1-x)} = \mathrm{e} \times \left(1+x+x^2+x^3+\frac{x^2}{2}+x^3+\frac{x^3}{6}\right)+o(x^3) \\
&\Longrightarrow \mathrm{e}^{1/(1-x)} = \mathrm{e} \times \left(1+x+\frac{3x^2}{2}+\frac{13x^3}{6}\right)+o(x^3)
\end{aligned}$$

Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned}
&f(x) = \mathrm{e} \times (1+x+x^2+x^3) \times \left(1+x+\frac{3x^2}{2}+\frac{13x^3}{6}\right)+o(x^3) \\
&\Longrightarrow f(x) = \mathrm{e} \times \left(1+x+\frac{3x^2}{2}+\frac{13x^3}{6}+x+x^2+\frac{3x^3}{2}+x^2+x^3+x^3\right)+o(x^3) \\
&\Longrightarrow f(x) = \mathrm{e} \times \left(1+2x+\frac{7x^2}{2}+\frac{17x^3}{3}\right)+o(x^3)
\end{aligned}$$

**Conclusion.** $\forall x \in I,\ f(x) = \mathrm{e}+2\mathrm{e}x+\dfrac{7\mathrm{e}x^2}{2}+\dfrac{17\mathrm{e}x^3}{3}+o(x^3)$

**6**/ Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists P_n \in \mathbb{R}[X],\ \forall x \in I,\ f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{1-x}\right)\mathrm{e}^{1/(1-x)}$$

Pour tout entier naturel $n$ notons $A(n)$ l'assertion : "$\exists P_n \in \mathbb{R}[X],\ \forall x \in I,\ f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{1-x}\right)\mathrm{e}^{1/(1-x)}$"

D'après l'énoncé : $\forall x \in I,\quad f(x) = \dfrac{1}{1-x}\mathrm{e}^{1/(1-x)}$. Ainsi : $\forall x \in I,\quad f(x) = P_0\left(\dfrac{1}{1-x}\right)\mathrm{e}^{1/(1-x)}$ en ayant posé $P_0 = X$. L'assertion $A(0)$ est donc vraie.

Supposons à présent $A(n)$ vraie pour un certain entier naturel $n$. Alors :

$$\forall x \in I,\ f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{1-x}\right)\mathrm{e}^{1/(1-x)}$$

Selon les hypothèses et théorèmes généraux, $f^{(n+1)}$ existe sur $I$ et on déduit de la ligne précédente (en appliquant une fois la formule donnant la dérivée d'un produit, et deux fois celle donnant la dérivée d'une composée) :

$$\forall x \in I,\ f^{(n+1)}(x) = \left(\frac{1}{1-x}\right)^2 P'_n\left(\frac{1}{1-x}\right)\mathrm{e}^{1/(1-x)}+\left(\frac{1}{1-x}\right)^2 P_n\left(\frac{1}{1-x}\right)\mathrm{e}^{1/(1-x)}$$

D'où :

$$\forall\, x \in I,\ f^{(n+1)}(x) = \left(\frac{1}{1-x}\right)^2 \left(P_n\left(\frac{1}{1-x}\right) + P'{}_n\left(\frac{1}{1-x}\right)\right) \mathrm{e}^{1/(1-x)}$$

Soit :

$$\forall\, x \in I,\ f^{(n+1)}(x) = P_{n+1}\left(\frac{1}{1-x}\right) \mathrm{e}^{1/(1-x)} \quad \text{en ayant posé :} \quad P_{n+1} = X^2\left(P_n + P'{}_n\right)$$

Puisque $P_{n+1} \in \mathbb{R}[X]$ (par construction), l'assertion $A(n+1)$ est vraie. Récurrence établie.

**Conclusion.** $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \exists\, P_n \in \mathbb{R}[X],\ \forall\, x \in I,\ f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{1-x}\right) \mathrm{e}^{1/(1-x)}$

**7**/ Etablir que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad P_{n+1} = X^2\left(P_n + P_n'\right)$$

C'est une conséquence immédiate de l'hérédité dans la question précédente.

**Conclusion.** $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad P_{n+1} = X^2\left(P_n + P_n'\right)$

**8**/ Préciser les polynômes $P_0$, $P_1$, $P_2$ et $P_3$.*

D'après l'initialisation de la récurrence dans la question 6 on a : $P_0 = X$. On en déduit successivement que :

$$P_1 = X^3 + X^2\,; \qquad P_2 = X^5 + 4X^4 + 2X^3\,; \qquad P_3 = X^7 + 9X^6 + 18X^5 + 6X^4.$$

**Conclusion.** $P_0 = X\,;$ $\quad P_1 = X^3+X^2\,;$ $\quad P_2 = X^5+4X^4+2X^3\,;$ $\quad P_3 = X^7+9X^6+18X^5+6X^4.$

**9**/ Vérifier que la fonction $f$ est solution sur $I$ de l'équation différentielle :

$$(E) \qquad (1-x)^2\, y' = (2-x)\, y$$

Immédiat.

**10**/ Etablir que pour tout réel $x$ de $I$, et pour tout entier naturel $n$ non nul on a :

$$(1-x)^2 f^{(n+1)}(x) - 2n(1-x)f^{(n)}(x) + n(n-1)f^{(n-1)}(x) = (2-x)f^{(n)}(x) - nf^{(n-1)}(x)$$

La fonction $f$ et les fonctions polynomiales étant de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $I$, on peut appliquer la formule de Leibniz terme à terme sur l'égalité de la question précédente pour obtenir la conclusion.

**Conclusion.** $\forall\,(x,n) \in I \times \mathbb{N},$

$$(1-x)^2 f^{(n+1)}(x) - 2n(1-x)f^{(n)}(x) + n(n-1)f^{(n-1)}(x) = (2-x)f^{(n)}(x) - nf^{(n-1)}(x)$$

*. Indication : on a $P_0 = X$.

**11/** Etablir que pour tout entier naturel $n$ on a :

$$P_{n+1} = \left[(2n+1)X + X^2\right] P_n - n^2 X^2 P_{n-1}$$

Soit $(x, n) \in I \times \mathbb{N}$. D'après les questions 8 et 10, on a :

$$(1-x)^2 P_{n+1}\left(\frac{1}{1-x}\right) \mathrm{e}^{1/(1-x)} - 2n(1-x)P_n\left(\frac{1}{1-x}\right) \mathrm{e}^{1/(1-x)} + n(n-1)P_{n-1}\left(\frac{1}{1-x}\right) \mathrm{e}^{1/(1-x)}$$
$$= (2-x)P_n\left(\frac{1}{1-x}\right) \mathrm{e}^{1/(1-x)} - nP_{n-1}\left(\frac{1}{1-x}\right) \mathrm{e}^{1/(1-x)}$$

En multipliant les deux termes de cette égalité par $\mathrm{e}^{1/(1-x)}(1-x)^2$, on obtient

$$P_{n+1}\left(\frac{1}{1-x}\right) - 2n\frac{1}{1-x}P_n\left(\frac{1}{1-x}\right) + n(n-1)\frac{1}{(1-x)^2}P_{n-1}\left(\frac{1}{1-x}\right)$$
$$= (2-x)\frac{1}{1-x}P_n\left(\frac{1}{1-x}\right) - n\frac{1}{1-x}P_{n-1}\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

D'où :

$$P_{n+1}\left(\frac{1}{1-x}\right) - \left((2n+1)\frac{1}{1-x} + \left(\frac{1}{1-x}\right)^2\right) P_n\left(\frac{1}{1-x}\right) + n^2\left(\frac{1}{1-x}\right)^2 P_{n-1}\left(\frac{1}{1-x}\right) = 0$$

Donc, comme $x \mapsto 1/(1-x)$ est une bijection de $I$ sur $\mathbb{R}_+^*$,

le polynôme $P_{n+1} - \left[(2n+1)X + X^2\right] P_n + n^2 X^2 P_{n-1}$ possède une infinité de racines : c'est donc le polynôme nul.

**Conclusion.** $\forall n \in \mathbb{N}, \quad P_{n+1} = \left[(2n+1)X + X^2\right] P_n - n^2 X^2 P_{n-1}$

**12/** Etablir que pour tout entier naturel $n$, le polynôme $P_n$ est unitaire et de degré $2n+1$.

Par récurrence, de la même manière qu'en colle pour les polynômes de Tchebychev.
**Conclusion.** $\forall n \in \mathbb{N},\ \deg(P_n) = 2n+1$ et $\mathrm{cd}(P_n) = 1$.

## Partie 3 - Développement limité de $f$ à l'ordre $n$ en $0$

Pour tout entier naturel $n$, on pose $a_n = f^{(n)}(0)$.

**13/** Pour tout entier naturel $n$, exprimer $a_{n+1}$ en fonction de $n$, $a_n$ et $a_{n-1}$.

Soit $n$ un entier naturel. On a : $f^{(n)}(0) = P_n(1)\mathrm{e}$. Or, d'après la question 11 :

$$P_{n+1}(1) = 2(n+1)P_n(1) - n^2 P_{n-1}(1)$$

**Conclusion.** $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_{n+1} = 2(n+1)a_n - n^2 a_{n-1}$

**14/ Développement limité à l'ordre 4 en 0 de $f$.**

**a/** En utilisant la définition de $P_n$ et la question 8, déterminer les valeurs de $a_0$, $a_1$, $a_2$ et $a_3$.

D'après la question 8 et la formule de Taylor-Young on a :

$$a_0 = \mathrm{e}\,; \quad a_1 = 2\mathrm{e}\,; \quad a_2 = 7\mathrm{e} \text{ et } a_3 = 34\mathrm{e}$$

**b/** En déduire la valeur de $a_4$, puis le développement limité de $f$ à l'ordre 4 en 0.

D'après les deux questions précédentes : $a_4 = 8a_3 - 9a_2 = 209\mathrm{e}$. Il s'ensuit que :

$$\forall\, x \in I,\ f(x) = \mathrm{e} + 2\mathrm{e}x + \frac{7\mathrm{e}x^2}{2} + \frac{17\mathrm{e}x^3}{3} + \frac{209\mathrm{e}x^4}{24} + o(x^4)$$

**15/** Pour tout couple $(n, p)$ d'entiers naturels, on pose :

$$S_p(n) = \sum_{i=0}^{p} \frac{(n+i)!}{(i!)^2}$$

**a/** Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Exprimer $S_p(0)$ et $S_p(1)$ en fonction de $u_p$ et $u_{p-1}$ (où $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ désigne la suite introduite dans la partie 1.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. D'une part : $S_p(n) = \displaystyle\sum_{i=0}^{p} \frac{i!}{(i!)^2} = \sum_{i=0}^{p} \frac{1}{i!} = u_p$.

D'autre part :

$$S_p(1) = \sum_{i=0}^{p} \frac{(i+1)!}{(i!)^2} = \sum_{i=0}^{p} \frac{(i+1)\times i!}{(i!)^2} = \sum_{i=0}^{p} \frac{i!}{(i!)^2} + \sum_{i=0}^{p} \frac{i\times i!}{(i!)^2} = \sum_{i=0}^{p} \frac{1}{i!} + \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{(i-1)!}$$

Finalement : $\quad S_p(1) = \displaystyle\sum_{i=0}^{p} \frac{1}{i!} + \sum_{i=0}^{p-1} \frac{1}{i!} = u_p + u_{p-1}$

**Conclusion.** $\forall\, p \in \mathbb{N}^*,\ S_p(0) = u_p$ et $S_p(1) = u_p + u_{p-1}$.

**b/** Prouver que les suites $(S_p(0))_{p\in\mathbb{N}}$ et $(S_p(1))_{p\in\mathbb{N}}$ convergent, et déterminer leurs limites.

D'après la question précédente et la question 4 : $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} S_p(0) = \mathrm{e}$ et $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} S_p(1) = 2\mathrm{e}$.

**16/** Soient $n$ et $p$ deux entiers naturels non nuls. Etablir que :

$$S_p(n+1) - (2n+2)S_p(n) + n^2 S_p(n-1) = S_{p-1}(n) - S_p(n)$$

Soient $n$ et $p$ dans $\mathbb{N}^*$. On a :

$$S_p(n+1) - (2n+2)S_p(n) + n^2 S_p(n-1) = \sum_{i=0}^{p} \frac{(n+1+i)! - (2n+2)(n+i)! + n^2\,(n-1+i)!}{(i!)^2}$$

Or, pour tout $i \in [\![ 1, p ]\!]$ on a :

$$\begin{aligned}
&\frac{(n+1+i)! - (2n+2)(n+i)! + n^2\,(n-1+i)!}{(i!)^2} \\
&\qquad = \frac{(n-1+i)!}{(i!)^2}\left[(n+1+i)(n+i) - (2n+2)(n+i) + n^2\right] \\
&\qquad = \frac{(n-1+i)!}{(i!)^2}\left[n^2 + in + n + i + in + i^2 - 2n^2 - 2ni - 2n - 2i + n^2\right] \\
&\qquad = \frac{(n-1+i)!}{(i!)^2}\left[i^2 - in - n\right] \\
&\qquad = \frac{(n-1+i)!}{((i-1)!)^2} - \frac{(n+i)!}{(i!)^2}
\end{aligned}$$

Finalement :

$$\begin{aligned}
S_p(n+1) - (2n+2)S_p(n) + n^2 S_p(n-1) &= -n! + \sum_{i=1}^{p} \frac{(n-1+i)!}{((i-1)!)^2} - \sum_{i=1}^{p} \frac{(n+i)!}{(i!)^2} \\
&= \sum_{i=0}^{p-1} \frac{(n+i)!}{(i!)^2} - \sum_{i=0}^{p} \frac{(n+i)!}{(i!)^2}
\end{aligned}$$

**Conclusion.** $\forall\,(n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*,\ S_p(n+1) - (2n+2)S_p(n) + n^2 S_p(n-1) = S_{p-1}(n) - S_p(n)$

**17/** En déduire, à l'aide d'une récurrence double, que la suite $(S_p(n))_{p\in\mathbb{N}}$ est convergente pour tout entier naturel $n$.

Pour tout entier naturel $n$ notons $\mathscr{P}(n)$ l'assertion "la suite $(S_p(n))_{p\in\mathbb{N}}$ est convergente".

**Initialisation ($n = 0$ et $n = 1$).** Les suites $(S_p(0))_{p\in\mathbb{N}}$ et $(S_p(1))_{p\in\mathbb{N}}$ sont convergentes d'après la question 15-b.

**Hérédité**. Supposons les assertions $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$ vraies pour un certain entier naturel $n$. D'après la question précédente, on a :

$$\forall\, p \in \mathbb{N}, \quad S_p(n+2) = (2n+4)S_p(n+1) - (n+1)^2 S_p(n) + S_{p-1}(n+1) - S_p(n+1)$$

Il s'ensuit que la suite $(S_p(n+2))_{p\in\mathbb{N}}$ converge, en tant que combinaison linéaire de suites convergentes (par hypothèse de récurrence).

En résumé : $(\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)) \Longrightarrow \mathscr{P}(n+2)$. Récurrence établie.

**Conclusion.** La suite $(S_p(n))_{p\in\mathbb{N}}$ est convergente pour tout entier naturel $n$.

**18/** Prouver que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f^{(n)}(0) = \lim_{p \to +\infty} \sum_{i=0}^{p} \frac{(n+i)!}{(i!)^2}$$

Puisque les suites $(S_p(n))_{p\in\mathbb{N}}$ sont convergentes pour tout entier naturel $n$, on peut passer à la limite dans la relation de la question 16.

Explicitement, en notant $b_n = \lim\limits_{n \to +\infty} S_p(n)$, on obtient :

$$b_{n+1} - (2n+2)b_n + n^2 b_{n-1} = 0$$

D'après la question 13, les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient la même relation de récurrence double.

En outre : $a_0 = \mathrm{e} = b_0$, et $a_1 = 2\mathrm{e} = b_1$ d'après les questions 14-a et 15-b.

Par suite : $\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = a_n$. D'où : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \lim\limits_{n \to +\infty} S_p(n)$.

**Conclusion.** $\forall n \in \mathbb{N}, \quad f^{(n)}(0) = \lim\limits_{p \to +\infty} \sum\limits_{i=0}^{p} \dfrac{(n+i)!}{(i!)^2}$

## Problème 2 — Un calcul de $\zeta(2)$

**Problématique**. *L'objectif de ce problème est de prouver un résultat maintes fois évoqué cette année, mais pas encore démontré : la somme des inverses des carrés des entiers*

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{N^2}$$

*admet une limite finie lorsque $N$ tend vers $+\infty$, et cette limite, notée $\zeta(2)$ (en référence à la fonction zêta de Riemann) est égale à* $\dfrac{\pi^2}{6}$.

### Partie 1 - La fonction cotangente

On note $D=\mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z}$, et pour tout réel $x\in D$, on appelle **cotangente** de $x$ le réel

$$\operatorname{cotan}(x)=\frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

**1**/ Etablir que la fonction cotan est impaire, et $\pi$-périodique.

Il résulte de la définition que l'ensemble $D$ est stable par passage à l'opposé ($x\in D\Longrightarrow(-x)\in D$) et par translation de $\pi$ ($x\in D\Longrightarrow(x+\pi)\in D$), ce qui rend légitimes les calculs ci-dessous :

$$\forall\, x\in D,\ \operatorname{cotan}(-x)=\frac{\cos(-x)}{\sin(-x)}=-\frac{\cos(x)}{\sin(x)}=-\operatorname{cotan}(x)$$

$$\text{et}\quad \forall\, x\in D,\ \operatorname{cotan}(x+\pi)=\frac{\cos(x+\pi)}{\sin(x+\pi)}=\frac{-\cos(x)}{-\sin(x)}=\operatorname{cotan}(x)$$

**Conclusion.** La fonction cotan est impaire, et $\pi$-périodique.

**2**/ Dresser le tableau de variation de la fonction cotan sur $]0,\pi[$. En déduire le signe de cotan sur $]0,\pi[$.

Selon les théorèmes généraux, la fonction cotan est dérivable sur $]0,\pi[$, et :

$$\forall\, x\in]0,\pi[,\ \operatorname{cotan}'(x)=\frac{-\sin^2(x)-\cos^2(x)}{\sin^2(x)}=-\frac{1}{\sin^2(x)}$$

**Conclusion.** On en déduit que cotan est strictement décroissante sur $]0,\pi[$. Comme en outre elle s'annule en $\dfrac{\pi}{2}$, on peut affirmer que $f$ est strictement positive (*resp.* nulle, *resp.* strictement négative) sur $]0,\pi/2[$ (*resp.* en $\pi/2$, *resp.* sur $]\pi/2,\pi[$).

### Partie 2 - Un polynôme scindé dans $\mathbb{R}$ à racines simples

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose :

$$P_n=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left((X+\mathrm{i})^{2n+1}-(X-\mathrm{i})^{2n+1}\right)$$

Dans les questions ci-dessous, $n$ désigne un entier naturel non nul arbitraire.

**3**/ A l'aide du binôme de Newton, établir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P_n = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \binom{2n+1}{2p+1} X^{2n-2p}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une double application du binôme de Newton donne :

$$(X+\mathrm{i})^{2n+1} - (X-\mathrm{i})^{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} (1-(-1)^k)\mathrm{i}^k X^{2n+1-k}$$

$$= \sum_{m=0}^{n} \binom{2n+1}{2m} \underbrace{(1-(-1)^{2m})}_{=0} \mathrm{i}^{2m} X^{2n+1-2m} + \sum_{m=0}^{n} \binom{2n+1}{2m+1} (1-(-1)^{2m+1}) \mathrm{i}^{2m+1} X^{2n+1-(2m+1)}$$

$$= \sum_{m=0}^{n} \binom{2n+1}{2m+1} 2\mathrm{i}(-1)^m X^{2(n-m)}$$

$$= 2\mathrm{i} \sum_{m=0}^{n} \binom{2n+1}{2m+1} (-1)^m X^{2(n-m)}$$

Par suite : $P_n = \dfrac{1}{2\mathrm{i}}\left((X+\mathrm{i})^{2n+1} - (X-\mathrm{i})^{2n+1}\right) = \displaystyle\sum_{m=0}^{n} \binom{2n+1}{2m+1} (-1)^m X^{2(n-m)}$

**Conclusion.** $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} (-1)^p \binom{2n+1}{2p+1} X^{2n-2p}$

**4**/ En déduire le degré et le coefficient dominant de $P_n$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente : $P_n = (2n+1)X^{2n} + \underbrace{\displaystyle\sum_{p=1}^{n} (-1)^p \binom{2n+1}{2p+1} X^{2n-2p}}_{\text{degré} \leqslant 2n-2}$.

**Conclusion.** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\deg(P_n) = 2n$ et $\mathrm{cd}(P_n) = 2n+1$.

**5**/ **Racines du polynôme $P_n$.**

**a**/ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue $z$ :

$$(z+\mathrm{i})^{2n+1} - (z-\mathrm{i})^{2n+1} = 0$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et soit $z \in \mathbb{C}$. On a :

$$(z+\mathrm{i})^{2n+1} - (z-\mathrm{i})^{2n+1} = 0$$

$$\iff (z+\mathrm{i})^{2n+1} = (z-\mathrm{i})^{2n+1}$$

$$\iff \frac{(z+\mathrm{i})^{2n+1}}{(z-\mathrm{i})^{2n+1}} = 1 \quad (\mathrm{i} \text{ n'est pas racine})$$

$$\iff \frac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}} \in \mathbb{U}_{2n+1}$$

$$\iff \exists\, k \in [\![\, 0, 2n \,]\!],\ \frac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}} = \omega^k \quad \left(\text{avec } \omega = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\,\pi/(2n+1)}\right)$$

$$\iff \exists\, k \in [\![\, 0, 2n \,]\!],\ z + \mathrm{i} = \omega^k z - \omega^k \mathrm{i}$$

$$\iff \exists\, k \in [\![\, 0, 2n \,]\!],\ z\left(1 - \omega^k\right) = -\left(1 + \omega^k\right)\mathrm{i}$$

$$\iff \exists\, k \in [\![\, 1, 2n \,]\!],\ z = \frac{\omega^k + 1}{\omega^k - 1}\mathrm{i}$$

$$\iff \exists\, k \in [\![\, 1, 2n \,]\!],\ z = \frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\,k\pi/(2n+1)} + 1}{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\,\pi/(2n+1)} - 1}\mathrm{i}$$

$$\iff \exists\, k \in [\![\, 1, 2n \,]\!],\ z = \frac{2\cos\left(\dfrac{k\pi}{2n+1}\right)}{2\mathrm{i}\sin\left(\dfrac{k\pi}{2n+1}\right)}\mathrm{i} \quad (\text{angle-moitié})$$

$$\iff \exists\, k \in [\![\, 1, 2n \,]\!],\ z = \operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$$

**Conclusion.** $\left((z+\mathrm{i})^{2n+1} - (z-\mathrm{i})^{2n+1} = 0\right) \iff \left(\exists\, k \in [\![\, 1, 2n \,]\!],\ z = \operatorname{cotan}\left(\dfrac{k\pi}{2n+1}\right)\right)$

**b/** A l'aide de la question 2, établir que les réels de l'ensemble $\left\{\operatorname{cotan}\left(\dfrac{k\pi}{2n+1}\right),\ k \in [\![\, 1, n \,]\!]\right\}$ sont deux à deux distincts.

Pour tout entier $k \in [\![\, 1, n \,]\!]$, les réels $\dfrac{k\pi}{2n+1}$ appartiennent à $]0, \pi/2[$. Sur cet intervalle, la fonction cotan est strictement décroissante (question 2), donc injective.

**Conclusion.** Les réels de l'ensemble $\left\{\operatorname{cotan}\left(\dfrac{k\pi}{2n+1}\right),\ k \in [\![\, 1, n \,]\!]\right\}$ sont deux à deux distincts.

**c/** En déduire que le polynôme $P_n$ possède exactement $2n$ racines, toutes réelles et simples, que l'on explicitera.

D'après la question 5-a, les réels de l'ensemble $E = \left\{\operatorname{cotan}\left(\dfrac{k\pi}{2n+1}\right),\ k \in [\![\, 1, 2n \,]\!]\right\}$ sont racines du polynôme $P_n$. Cet ensemble $E$ est une réunion :

$$E = \underbrace{\left\{\operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right),\ k \in [\![\, 1, n \,]\!]\right\}}_{=E_1} \cup \underbrace{\left\{\operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right),\ k \in [\![\, n+1, 2n \,]\!]\right\}}_{E_2}$$

Les réels de $E_1$ sont 2 à 2 distincts d'après la question précédente, et constituent donc $n$ racines de $P_n$.

Par ailleurs, considérons un élément $x$ de $E_2$ : $\exists\, k \in [\![\, n+1, 2n \,]\!],\ x = \operatorname{cotan}\left(\dfrac{k\pi}{2n+1}\right)$

Puisque la fonction cotan est $\pi$-périodique, on a :

$$x = \operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{2n+1} - \pi\right) = \operatorname{cotan}\left(\frac{k-(2n+1)\pi}{2n+1}\right) = -\operatorname{cotan}\left(\frac{(2n+1)-k\pi}{2n+1}\right)$$
$$= -\operatorname{cotan}\left(\frac{K\pi}{2n+1}\right)$$

en ayant posé : $K = 2n+1-k$. En observant que $K \in [\![\, 1, n \,]\!]$, on a établi que les éléments de $E_2$ sont les opposés des éléments de $E_1$. En d'autres termes :

$$E_2 = \left\{-\operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right),\ k \in [\![\, 1, n \,]\!]\right\}$$

Les éléments de $E_2$ sont deux à deux distincts, puisque les éléments de $E_1$ le sont. On pourrait encore observer, mais cela serait de la gourmandise, que les éléments de $E_2$ sont distincts de ceux de $E_1$ : les premiers sont strictement négatifs et les seconds strictement positifs, d'après l'étude de signe de cotan faite à la question 2.

En résumé :

$$\begin{cases} E = \left\{\operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right),\ k \in [\![\, 1, n \,]\!]\right\} \cup \left\{-\operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right),\ k \in [\![\, 1, n \,]\!]\right\} \\ \text{Les éléments de } E \text{ sont racines de } P_n \\ \operatorname{Card}(E) = 2n \end{cases}$$

Les éléments de $E$ constituent donc $2n$ racines du polynôme $P_n$. Puisque le degré de $P_n$ est $2n$, on en déduit que les éléments de $E$ sont exactement les racines de $P_n$, et qu'elles sont toutes simples (leur nombre étant égal au degré de $P_n$).

**Conclusion.** Les racines de $P_n$ sont exactement les éléments de $E$.

**6**/ Déduire de ce qui précède que :

$$P_n = (2n+1)\prod_{k=1}^{n}\left(X^2 - \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right)$$

D'après la question 4 ($\operatorname{cd}(P_n) = 2n+1$), et la question précédente : $P_n = (2n+1)\prod_{r\in E}(X-r)$

Plus explicitement : $P_n = (2n+1)\prod_{k=1}^{n}\left(X - \operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right)\prod_{k=1}^{n}\left(X + \operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right)$

**Conclusion.** $P_n = (2n+1)\prod_{k=1}^{n}\left(X^2 - \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right)$

## Partie 3 - Valeur exacte de $\zeta(2)$

Dans les questions ci-dessous, $n$ désigne un entier naturel non nul arbitraire.

**8**/ En comparant le coefficient de $X^{2n-2}$ dans les expressions de $P_n$ obtenues dans les questions 3 et 6, établir que :

$$\sum_{k=1}^{n} \text{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{n(2n-1)}{3}$$

Notons $\alpha$ le coefficient de $X^{2n-2}$ dans l'expression de $P_n$. D'après la question 3 : $\alpha = -\binom{2n+1}{3}$.

Par ailleurs, d'après la question 6 : $\alpha = -(2n+1)\sum_{k=1}^{n} \text{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$.

Par identification, on en déduit que :

$$\sum_{k=1}^{n} \text{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{1}{2n+1}\binom{2n+1}{3} = \frac{(2n+1)(2n)(2n-1)}{6(2n+1)} = \frac{n(2n-1)}{3}$$

**Conclusion.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \text{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{n(2n-1)}{3}$

**9**/ En déduire que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} = \frac{2n(n+1)}{3}$$

D'après la question précédente : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\cos^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} = \frac{n(2n-1)}{3}$

On en déduit, d'après la relation fondamentale de la trigonométrie que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1-\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} = \frac{n(2n-1)}{3}$$

Il s'ensuit que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} = \frac{n(2n-1)}{3} + n = \frac{n(2n+2)}{3} = \frac{2n(n+1)}{3}$$

**Conclusion.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} = \frac{2n(n+1)}{3}$

**10/ Un résultat intermédiaire.**

**a/** Justifier très brièvement que : $\forall\, t \in [0, \pi/2\,[\,, \qquad \cos(t) \leqslant 1 \leqslant 1 + \tan^2(t)$

Trivial.

**b/** Etablir que : $\forall\, x \in [0, \pi/2\,[\,, \qquad \sin(x) \leqslant x \leqslant \tan(x)$

Conséquence immédiate de la précédente, par intégration de l'encadrement précédent entre 0 et $x$ (et par croissance de l'intégrale).

**11/** Déduire de ce qui précède un encadrement de :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(\dfrac{k\pi}{2n+1}\right)^2}$$

D'après la question précédente, pour tout réel $x$ de $]0, \pi/2[$, on a : $\text{cotan}(x) \leqslant \dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{1}{\sin(x)}$.

Il s'ensuit que : $\forall\, x \in ]0, \pi/2[,\ \text{cotan}^2(x) \leqslant \dfrac{1}{x^2} \leqslant \dfrac{1}{\sin^2(x)}$.

On en déduit que :

$$\sum_{k=1}^{n} \text{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(\dfrac{k\pi}{2n+1}\right)^2} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin^2\left(\dfrac{k\pi}{2n+1}\right)}$$

D'après les questions 8 et 9, on en déduit que :

$$\frac{n(2n-1)}{3} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(\dfrac{k\pi}{2n+1}\right)^2} \leqslant \frac{2n(n+1)}{3}$$

**12/** En déduire la limite :

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

En poursuivant les calculs de la question précédente, on obtient :

$$\frac{n(2n-1)}{3} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{(2n+1)^2}{\pi^2 k^2} \leqslant \frac{2n(n+1)}{3}$$

D'où :

$$\frac{n(2n-1)\pi^2}{3(2n+1)^2} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{2n(n+1)\pi^2}{3(2n+1)^2}$$

Puisqu'il est clair que $\dfrac{n(2n-1)}{3(2n+1)^2}$ et $\dfrac{2n(n+1)}{3(2n+1)^2}$ sont tous deux équivalents à $\dfrac{2n^2}{12n^2}$, on peut affirmer que :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{n(2n-1)\pi^2}{3(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{et} \quad \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{2n(n+1)\pi^2}{3(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Par théorème d'encadrement : $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$

**Conclusion.** $\displaystyle\zeta(2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$

*La série de terme général* $\dfrac{1}{k^2}$ *est convergente, et a pour somme* $\dfrac{\pi^2}{6}$.