

EXERCICES 21 — FRACTIONS RATIONNELLES

EXERCICE 1 — Déterminer la décomposition en éléments simples de $\mathbb{C}(X)$ des fractions rationnelles suivantes :

$$F_1 = \frac{3X}{(X-1)(X+1)(X+2)}; \quad F_2 = \frac{X+3}{(X+1)(X^2-4)}; \quad F_3 = \frac{X^2+3X+7}{X^2-3X+2}; \quad F_4 = \frac{X+1}{X^2(X-1)^2}$$

EXERCICE 2 — 1/ On considère la fraction rationnelle : $F = \frac{3X^2 - X + 10}{X^4 + 2X^3 - 7X^2 - 8X + 12}$.

a/ Quel est le degré de F ? Quelle est sa partie entière?

b/ Décomposer en éléments simples F dans $\mathbb{R}(X)$.

Indication : les réels 1 et 2 sont racines du dénominateur.

2/ Pour tout entier $N \geq 3$, on pose : $S_N = \sum_{n=3}^N \frac{3n^2 - n + 10}{n^4 + 2n^3 - 7n^2 - 8n + 12}$.

a/ Calculer S_N pour tout entier $N \geq 3$.

b/ Dédire de la question précédente que la suite $(S_N)_N$ est convergente, et préciser $\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N$.

EXERCICE 3 — 1/ On considère la fraction rationnelle : $F = \frac{X^2 + 5X - 2}{X^4 - 2X^3 - X^2 + 2X}$.

Décomposer en éléments simples F dans $\mathbb{R}(X)$.

Indication. Dans cette question, vous pouvez utiliser sans les justifier les éléments que voici : le polynôme $Q = X^4 - 2X^3 - X^2 + 2X$ ne possède que des racines simples ; 2 est racine de Q ; enfin, Q possède deux racines opposées.

2/ Pour tout entier $N \geq 3$, on pose : $S_N = \sum_{n=3}^N \frac{n^2 + 5n - 2}{n^4 - 2n^3 - n^2 + 2n}$.

Etablir que la suite $(S_N)_N$ est convergente, et déterminer $\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N$.

EXERCICE 4 — **Théorique, mais pas trop compliqué 1.**

Démontrer les propriétés du degré dans $\mathbb{K}(X)$, à savoir :

$$\forall (F_1, F_2) \in \mathbb{K}(X)^2, \quad \deg(F_1 F_2) = \deg(F_1) + \deg(F_2) \quad \text{et} \quad \deg(F_1 + F_2) \leq \max(\deg(F_1), \deg(F_2))$$

EXERCICE 5 — **Théorique, mais pas trop compliqué 2.** Démontrer que $(\mathbb{K}(X), +, \times)$ est un corps.

EXERCICE 6 —  Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Déterminer la décomposition en éléments simples de $\mathbb{C}(X)$ de :

$$F = \frac{1}{X^n - 1}$$

Indication : on n'utilisera surtout pas la méthode d'identification :-)

EXERCICE 7 —  Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Déterminer la décomposition en éléments simples de $\mathbb{C}(X)$ de :

$$F = \frac{X^{n-1}}{X^n - 1}$$

Indication : on n'utilisera surtout pas la méthode d'identification non plus !

EXERCICE 8 —  Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Déterminer la décomposition en éléments simples de $\mathbb{C}(X)$ de :

$$F = \frac{n!}{X(X+1)\cdots(X+n)}$$

EXERCICE 9 —  On considère la fraction rationnelle : $F = \frac{4X^2 + 8X + 1}{X^3 + 3X^2 + 4X + 12}$.

On pose : $Q = X^3 + 3X^2 + 4X + 12$.

1/ Vérifier que $z_0 = 2i$ est racine de Q .

2/ Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction rationnelle F .

EXERCICE 10 —  Calculer l'intégrale :

$$I = \int_2^3 \frac{1}{x^3 - 1} dx$$

EXERCICE 11 —  Déterminer une primitive sur \mathbb{R} de :

$$f : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{x^4 + 1}$$

QUELQUES PISTES ET ÉLÉMENTS DE RÉPONSES

$$\text{EXERCICE 1} \quad F_1 = \frac{3X}{(X-1)(X+1)(X+2)} = \frac{1}{3} \frac{1}{X+2} - \frac{1}{2} \frac{1}{X+1} + \frac{1}{6} \frac{1}{X-1}$$

$$F_2 = \frac{X+3}{(X+1)(X^2-4)} = \frac{1}{4} \frac{1}{X+2} - \frac{2}{3} \frac{1}{X+1} + \frac{5}{12} \frac{1}{X-2}$$

$$F_3 = \frac{X^2+3X+7}{X^2-3X+2} = 1 + \frac{17}{X-2} - \frac{11}{X-1}$$

$$F_4 = \frac{X+1}{X^2(X-1)^2} = \frac{3}{X} + \frac{1}{X^2} - \frac{3}{(X-1)} + \frac{2}{(X-1)^2}$$

$$\text{EXERCICE 2} \quad 1/ \text{ On considère la fraction rationnelle : } F = \frac{3X^2 - X + 10}{X^4 + 2X^3 - 7X^2 - 8X + 12}.$$

a/ D'après le cours : $\deg\left(\frac{3X^2 - X + 10}{X^4 + 2X^3 - 7X^2 - 8X + 12}\right) = -2$. La partie entière de F est donc nulle.

b/ Notons $Q = X^4 + 2X^3 - 7X^2 - 8X + 12$. D'après l'énoncé, Q admet 1 et 2 pour racines. Il s'ensuit que $(X-1)(X-2)$ divise le polynôme Q .

En effectuant la division euclidienne de Q par $(X-1)(X-2)$, on obtient : $Q = (X-1)(X-2)(X^2 + 5X + 6)$. Le polynôme du second degré se factorisant aisément, on en déduit que : $Q = (X-1)(X-2)(X+2)(X+3)$.

$$\text{Par suite : } F = \frac{3X^2 - X + 10}{(X-1)(X-2)(X+2)(X+3)}.$$

On déduit de cette écriture et du théorème de la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ que :

$$\exists! (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4, F = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X-2} + \frac{c}{X+2} + \frac{d}{X+3}$$

Puisque F ne possède que des pôles simples, les réels a, b, c et d peuvent être trouvés à l'aide de la formule du cours idoïne.*

En notant $P = 3X^2 - X + 10$, et $Q = X^4 + 2X^3 - 7X^2 - 8X + 12$, on a : $Q' = 4X^3 + 6X^2 - 14X - 8$. Par conséquent :

$$a = \frac{P(1)}{Q'(1)} = \frac{12}{-12} = -1; \quad b = \frac{P(2)}{Q'(2)} = \frac{20}{20} = 1; \quad c = \frac{P(-2)}{Q'(-2)} = \frac{24}{12} = 2; \quad d = \frac{P(-3)}{Q'(-3)} = \frac{40}{-20} = -2.$$

$$\text{Conclusion. } \frac{3X^2 - X + 10}{(X-1)(X-2)(X+2)(X+3)} = \frac{1}{X-2} - \frac{1}{X-1} + \frac{2}{X+2} - \frac{2}{X+3}.$$

2/ Soit un entier $N \geq 3$. D'après la question précédente :

$$S_N = \sum_{n=3}^N \frac{3n^2 - n + 10}{n^4 + 2n^3 - 7n^2 - 8n + 12} = \sum_{n=3}^N \left[\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1} + \frac{2}{n+2} - \frac{2}{n+3} \right]$$

*. “ $\frac{P(\alpha)}{Q'(\alpha)}$ ”. Les coefficients a, b, c et d peuvent également être obtenus par “multiplication/évaluation”.

$$\text{D'où : } S_N = \left(\sum_{n=3}^N \left[\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1} \right] \right) + 2 \left(\sum_{n=3}^N \left[\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right] \right)$$

Ayant reconnu deux sommes télescopiques, on en déduit que :

$$S_N = 1 - \frac{1}{N-1} + 2 \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{N+3} \right) = \frac{7}{5} - \frac{1}{N-1} - \frac{2}{N+3}$$

$$\text{Conclusion. } \forall N \in \mathbb{N}, N \geq 3, S_N = \frac{7}{5} - \frac{1}{N-1} - \frac{2}{N+3}$$

3/ On déduit immédiatement de ce qui précède que : $(S_N)_N$ est convergente, et $\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N = \frac{7}{5}$.

EXERCICE 3 — 1/ Avec les indications de l'énoncé, on obtient aisément :

$$X^4 - 2X^3 - X^2 + 2X = X(X-1)(X+1)(X-2)$$

Puisque la partie entière de la fraction rationnelle F est nulle, et que tous ses pôles sont simples, il existe un unique quadruplet (a, b, c, d) de réels tels que :

$$\frac{X^2 + 5X - 2}{X^4 - 2X^3 - X^2 + 2X} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X-1} + \frac{c}{X+1} + \frac{d}{X-2}$$

Ces réels peuvent être déterminés par “multiplication-évaluation”, ou directement grâce à la formule du cours “ $P(\alpha)/Q'(\alpha)$ ”. En notant P et Q les numérateur et dénominateur de F respectivement, on a :

$$a = \frac{P(0)}{Q'(0)} = -1; \quad b = \frac{P(1)}{Q'(1)} = -2; \quad c = \frac{P(-1)}{Q'(-1)} = 1; \quad d = \frac{P(2)}{Q'(2)} = 2$$

$$\text{Conclusion. } \frac{X^2 + 5X - 2}{X^4 - 2X^3 - X^2 + 2X} = \frac{1}{X+1} - \frac{1}{X} + \frac{2}{X-2} - \frac{2}{X-1}$$

2/ Soit N un entier ≥ 3 . D'après la question précédente, on a :

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=3}^N \frac{n^2 + 5n - 2}{n^4 - 2n^3 - n^2 + 2n} = \sum_{n=3}^N \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} + \frac{2}{n-2} - \frac{2}{n-1} \right) \\ &= \sum_{n=3}^N \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \right) + 2 \sum_{n=3}^N \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1} \right) = \frac{1}{N+1} - \frac{1}{3} + 2 \left(1 - \frac{1}{N-1} \right) \end{aligned}$$

$$\text{On en déduit que : } S_N = \frac{5}{3} + \frac{1}{N+1} - \frac{2}{N+1}$$

$$\text{En particulier, la suite } (S_N) \text{ est convergente et : } \lim_{N \rightarrow +\infty} S_N = \frac{5}{3}$$

EXERCICE 4 — Utiliser les propriétés connues du degré pour les polynômes.

EXERCICE 5 — Observer que $(\mathbb{K}(X), +)$ est un groupe abélien, que la loi \times est associative, commutative, possède un neutre, et que tout élément non nul de $\mathbb{K}(X)$ est inversible.

EXERCICE 6 — Utiliser la “formule miracle : $\lambda_i = \frac{P(\alpha_i)}{Q'(\alpha_i)}$ ”.

EXERCICE 7 — Utiliser la “formule miracle : $\lambda_i = \frac{P(\alpha_i)}{Q'(\alpha_i)}$ ”.

EXERCICE 8 — Utiliser la “formule miracle : $\lambda_i = \frac{P(\alpha_i)}{Q'(\alpha_i)}$ ”.

EXERCICE 9 — On a : $F = \frac{4X^2 + 8X + 1}{X^3 + 3X^2 + 4X + 12}$. On pose : $Q = X^3 + 3X^2 + 4X + 12$.

On vérifie aisément que $Q(2i) = 0$.

Puisque Q est à coefficients réels, on en déduit que $(-2i)$ est également racine de Q . Il s’ensuit que $(X - 2i)(X + 2i) = (X^2 + 4)$ divise Q . Le polynôme Q étant de degré 3, de coefficient dominant 1 et de coefficient constant 12, on a : $Q = (X^2 + 4)(X + 3)$.

Conclusion. La DPI de $Q = X^3 + 3X^2 + 4X + 12$ dans $\mathbb{R}[X]$ est : $Q = (X^2 + 4)(X + 3)$.

b/ La fraction rationnelle F est de degré -1 ; sa partie entière est donc nulle. D’après le théorème de la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$:

$$\exists! (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, \quad F = \frac{a}{X + 3} + \frac{bX + c}{X^2 + 4}$$

Puisque -3 est un pôle simple de F , on a : $a = \frac{P(-3)}{Q'(-3)} = \frac{13}{13} = 1$.

En procédant (une fois n’est pas coutume) par identification, on obtient le système :

$$\begin{cases} b + 1 = 4 \\ c + 3b = 8 \\ 4 + 3c = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} b = 3 \\ c = -1 \end{cases}$$

Conclusion. La DES de $F = \frac{4X^2 + 8X + 1}{X^3 + 3X^2 + 4X + 12}$ dans $\mathbb{R}(X)$ est : $F = \frac{1}{X + 3} + \frac{3X - 1}{X^2 + 4}$.

EXERCICE 10 — Une primitive sur $[2, 3]$ de $x \mapsto \frac{1}{x^3 - 1}$ est :

$$x \mapsto \frac{1}{3} \ln(x - 1) - \frac{1}{6} \ln(x^2 + x + 1) - \frac{\sqrt{3}}{3} \arctan\left(\frac{2x + 1}{\sqrt{3}}\right)$$

La valeur de I s’en déduit.

EXERCICE 11 — Une primitive sur \mathbb{R} de $x \mapsto \frac{1}{x^4 + 1}$ est :

$$x \mapsto 2^{-5/2} \ln\left(\frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1}\right) + 2^{-3/2} \left(\arctan(\sqrt{2}x - 1) + \arctan(\sqrt{2}x + 1)\right)$$