COLLE 23 – QUESTIONS DE COURS

QUESTION DE COURS 1 — Propriétés du degré. Soient F_1 et $F_2 \in \mathbb{K}(X)$. On a : $\deg(F_1F_2) = \deg(F_1) + \deg(F_2)$ et $\deg(F_1 + F_2) \leqslant \max(\deg(F_1), \deg(F_2))$.

PREUVE. Cf cours.

QUESTION DE COURS 2 — Propriété (partie entière, partie polaire) : Soit $F \in \mathbb{K}(X)$. Il existe un unique couple (E, G) avec $E \in \mathbb{K}[X]$, et $G \in \mathbb{K}(X)$ de degré < 0 tel que : $F = E + G$.

PREUVE. Soit $F = P/Q$ une fraction rationnelle. D'après le théorème de la division euclidienne, il existe un unique couple (E, R) tel que : $P = EQ + R$ et $\deg(R) < \deg(Q)$.

On en déduit : $F = E+\dfrac{R}{Q}$. En posant $G = R/Q$, on a établi l'existence d'un couple $(E, G) \in \mathbb{K}[X]\times\mathbb{K}(X)$ tel que : $F = E + G$. En outre, puisque $\deg(R) < \deg(Q)$, on a : $\deg(G) < 0$.

Etablissons son unicité. Supposons qu'il existe un autre couple (E_1, G_1) satisfaisant les mêmes conditions. Alors en particulier : $\quad E - E_1 = G_1 - G$.

Supposons que $E - E_1 \neq 0$. Alors $\deg(E - E_1) \geqslant 0$ tandis que $\deg(G_1 - G) < 0$: contradiction.

On en déduit que $(E_1, G_1) = (E, G)$, ce qui établit l'unicité.

QUESTION DE COURS 3 — Propriété : soient $F = P/Q$ une fraction rationnelle irréductible, et α un pôle <u>simple</u> de F. Dans ce contexte, on peut écrire : $F = G+\dfrac{\lambda}{X-\alpha}$, où G est une fraction rationnelle n'admettant pas α pour pôle, et $\lambda = \dfrac{P\left(\alpha\right)}{Q'\left(\alpha\right)}$

PREUVE. Soient donc $F = P/Q$ une fraction rationnelle irréductible et α un pôle simple de F. On peut écrire (d'après la question de cours précédente) :

$$F = G + \frac{\lambda}{X-\alpha} \qquad (\spadesuit)$$

où G est une fraction rationnelle n'admettant pas α pour pôle.

Par ailleurs, il existe un polynôme Q_1 tel que : $Q = (X - \alpha)\, Q_1$ et $Q_1(\alpha) \neq 0$.

En multipliant l'identité $(\spadesuit)$ par $(X - \alpha)$ on obtient :

$$\frac{P}{Q_1} = (X-\alpha)\, G + \lambda$$

L'évaluation en α de cette relation donne : $\lambda = \dfrac{P(\alpha)}{Q_1(\alpha)} \qquad (\clubsuit)$.

Par ailleurs, puisque $Q = (X - \alpha)\, Q_1$, on a : $Q' = Q_1 + (X - \alpha)Q_1'$. D'où : $Q_1(\alpha) = Q'(\alpha)$.

On déduit de cette dernière égalité et de $(\clubsuit)$ que : $\lambda = \dfrac{P\left(\alpha\right)}{Q'\left(\alpha\right)}$.

Question de cours 4 — **Propriété** : soit $F \in \mathbb{K}(X)$, et soit α un pôle de multiplicité p de F. Il existe un unique couple (R, G) avec $R \in \mathbb{K}[X]$ de degré $< p$, et $G \in \mathbb{K}(X)$ n'admettant pas α pour pôle tel que :

$$F = G + \frac{R}{(X-\alpha)^p}$$

Preuve. Notons $F = P/Q$ sous forme irréductible. Puisque par hypothèse α est un pôle de multiplicité p de F, α est racine de multiplicité p de Q. Il s'ensuit que :

$$\exists\, Q_1 \in \mathbb{K}[X],\ \left[(Q = (X-\alpha)^p\, Q_1) \wedge (Q_1(\alpha) \neq 0)\right]$$

Les polynômes $(X-\alpha)^p$ et Q_1 sont premiers entre eux (puisque $(X-\alpha)$ ne divise pas Q_1). D'après le théorème de Bezout, il existe donc deux polynômes U et V de $\mathbb{K}[X]$ tels que :

$$U\,(X-\alpha)^p + VQ_1 = 1$$

On en déduit que :

$$F = \frac{P}{Q} = \frac{PU\,(X-\alpha)^p + PVQ_1}{(X-\alpha)^p\, Q_1} = \frac{PU}{Q_1} + \frac{PV}{(X-\alpha)^p}$$

On effectue alors la division euclidienne de PV par $(X-\alpha)^p$ pour écrire :

$$\exists\ (S, R) \in \mathbb{K}[X]^2, \quad PV = S\,(X-\alpha)^p + R \text{ avec } \deg(R) < p$$

On en déduit que :

$$F = \frac{P}{Q} = \frac{PU}{Q_1} + S + \frac{R}{(X-\alpha)^p}$$

Finalement, on pose : $G = \dfrac{PU}{Q_1} + S = \dfrac{PU + SQ_1}{Q_1}$. Ainsi, G est une fraction rationnelle n'admettant pas α pour pôle.

Conclusion. Si F est une fraction rationnelle admettant α pour pôle de multiplicité p, alors il existe un couple $(G, R) \in \mathbb{K}(X) \times \mathbb{K}[X]$ tel que G n'admet pas α pour pôle, R est de degré $< p$, et

$$F = G + \frac{R}{(X-\alpha)^p}$$

Reste à vérifier l'unicité : supposons qu'il existe deux couples (G_1, R_1) et (G_2, R_2) vérifiant les conditions de la conclusion ci-dessus. Alors en particulier :

$$G_1 - G_2 = \frac{R_2 - R_1}{(X-\alpha)^p}$$

Puisque α n'est pas un pôle de $G_1 - G_2$, on en déduit que α est racine de multiplicité au moins égale à p de $R_2 - R_1$. Or, les polynômes R_1 et R_2 étant de degré strictement inférieur ou égal à p, on a : $\deg(R_2 - R_1) < p$. Il s'ensuit que $R_2 - R_1 = 0$. Ce qui entraîne $(G_1, R_1) = (G_2, R_2)$, prouve l'unicité désirée, et achève la preuve de cette propriété.

Banque d'exercices

Exercice 1 — Décomposition en éléments simples de $F = \dfrac{1}{X^3 - X}$ dans $\mathbb{K}(X)$.

Exercice 2 — Décomposition en éléments simples de $F = \dfrac{1}{X(X-1)^2}$ dans $\mathbb{K}(X)$.

Exercice 3 — Décomposition en éléments simples de $F = \dfrac{1}{X^3 - 1}$ dans $\mathbb{C}(X)$ puis dans $\mathbb{R}(X)$.

Exercice 4 — Décomposition en éléments simples de $F = \dfrac{1}{X^n - 1}$ dans $\mathbb{C}(X)$ (avec $n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2$).

Exercice 5 — On note φ l'application qui à toute fraction rationnelle dans $\mathbb{K}(X)$ associe sa partie polaire.

Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{K}(X)$; déterminer $\ker\varphi$ et $\mathrm{im}\varphi$.

Pour information. Et comme vous avez été très sages cette semaine, voici donc l'énoncé général du théorème de décomposition en éléments simples !

Théorème (Décomposition en éléments simples). Soit $F = P/Q \in \mathbb{K}(X)$ une fraction rationnelle non nulle sous forme irréductible.

- Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Alors : $F = E + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} F_{\alpha_i} = E + \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{p_i-1} \frac{a_{ik}}{(X-\alpha_i)^{p_i-k}}$

  où l'on a noté E la partie entière de F, et $\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(X-\alpha_i)^{p_i}$ la décomposition en irréductibles de Q dans $\mathbb{C}[X]$;

- Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Alors : $F = E + \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{p_i-1} \frac{a_{ik}}{(X-\alpha_i)^{p_i-k}} + \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=0}^{q_j-1} \frac{b_{ik}X + c_{ik}}{(X^2+\beta_j X+\gamma_j)^{q_j-k}}$

  où l'on a noté E la partie entière de F, et $\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(X-\alpha_i)_i^{p}\prod_{j=1}^{m}\left(X^2+\beta_j X+\gamma_j\right)^{q_j}$ la décomposition en irréductibles de Q dans $\mathbb{R}[X]$.

Remarque. Cet énoncé n'est certainement pas à apprendre dans sa forme générale. En revanche, il faut l'invoquer dans les calculs de décomposition en éléments simples, pour justifier l'existence et la forme de la DES recherchée (cf 4 premiers exos de la banque).

Banque d'exercices - Corrigés