Colle 23 – Questions de cours

Question de cours 1 — Propriétés du degré. Soient F_1 et $F_2 \in \mathbb{K}(X)$. On a : $\deg(F_1F_2) = \deg(F_1) + \deg(F_2)$ et $\deg(F_1 + F_2) \leqslant \max(\deg(F_1), \deg(F_2))$.

Preuve. Soient $F_1 = P_1/Q_1$ et $F_2 = P_2/Q_2$ deux fractions rationnelles.

$$\text{On a : } \deg(F_1F_2) = \deg\left(\frac{P_1P_2}{Q_1Q_2}\right) = \deg(P_1P_2) - \deg(Q_1Q_2)$$
$$= (\deg(P_1) - \deg(Q_1)) + (\deg(P_2) - \deg(Q_2)) = \deg(F_1) + \deg(F_2)$$

Par ailleurs : $\deg(F_1 + F_2) = \deg\left(\dfrac{P_1Q_2 + P_2Q_1}{Q_1Q_2}\right) = \deg(P_1Q_2 + P_2Q_1) - \deg(Q_1Q_2)$

D'où : $\deg(F_1 + F_2) = \deg(P_1Q_2 + P_2Q_1) - \deg(Q_1) - \deg(Q_2) \qquad (\spadesuit)$Or : $\deg(P_1Q_2 + P_2Q_1) \leqslant \max(\deg(P_1Q_2), \deg(P_2Q_1))$

➤ **Premier cas** : si $\max(\deg(P_1Q_2), \deg(P_2Q_1)) = \deg(P_1Q_2)$

Alors d'après $(\spadesuit)$: $\deg(F_1+F_2) = \deg(P_1)+\deg(Q_2)-\deg(Q_1)-\deg(Q_2) = \deg(P_1)-\deg(Q_1) = \deg(F_1)$

➤ **Second cas** : si $\max(\deg(P_1Q_2), \deg(P_2Q_1)) = \deg(P_2Q_1)$

Alors d'après $(\spadesuit)$: $\deg(F_1+F_2) = \deg(P_2)+\deg(Q_1)-\deg(Q_1)-\deg(Q_2) = \deg(P_2)-\deg(Q_2) = \deg(F_2)$

On en déduit que : $\deg(F_1 + F_2) \leqslant \max(\deg(F_1), \deg(F_2))$.

Question de cours 2 — Propriété (partie entière, partie polaire) : Soit $F \in \mathbb{K}(X)$. Il existe un unique couple (E, G) avec $E \in \mathbb{K}[X]$, et $G \in \mathbb{K}(X)$ de degré < 0 tel que : $F = E + G$.

Preuve. Soit $F = P/Q$ une fraction rationnelle. D'après le théorème de la division euclidienne, il existe un unique couple (E, R) tel que : $P = EQ + R$ et $\deg(R) < \deg(Q)$.

On en déduit : $F = E + \dfrac{R}{Q}$. En posant $G = R/Q$, on a établi l'existence d'un couple $(E, G) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}(X)$ tel que : $F = E + G$. En outre, puisque $\deg(R) < \deg(Q)$, on a : $\deg(G) < 0$.

Etablissons son unicité. Supposons qu'il existe un autre couple (E_1, G_1) satisfaisant les mêmes conditions. Alors en particulier : $E - E_1 = G_1 - G$.

Supposons que $E - E_1 \neq 0$. Alors $\deg(E - E_1) \geqslant 0$ tandis que $\deg(G_1 - G) < 0$: contradiction.

On en déduit que $(E_1, G_1) = (E, G)$, ce qui établit l'unicité.

Question de cours 3 — Propriété : soient $F = P/Q$ une fraction rationnelle irréductible, et α un pôle simple de F. Dans ce contexte, on peut écrire : $F = G + \dfrac{\lambda}{X-\alpha}$, où G est une fraction rationnelle n'admettant pas α pour pôle, et $\lambda = \dfrac{P(\alpha)}{Q'(\alpha)}$

Preuve. Soient donc $F = P/Q$ une fraction rationnelle irréductible et α un pôle simple de F. On peut écrire (d'après la question de cours précédente) :

$$F = G + \frac{\lambda}{X-\alpha} \qquad (\spadesuit)$$

où G est une fraction rationnelle n'admettant pas α pour pôle.

Par ailleurs, il existe un polynôme Q_1 tel que : $Q = (X-\alpha)\,Q_1$ et $Q_1(\alpha) \neq 0$.

En multipliant l'identité $(\spadesuit)$ par $(X-\alpha)$ on obtient :

$$\frac{P}{Q_1} = (X-\alpha)\,G + \lambda$$

L'évaluation en α de cette relation donne : $\lambda = \dfrac{P(\alpha)}{Q_1(\alpha)} \qquad (\clubsuit)$.

Par ailleurs, puisque $Q = (X-\alpha)\,Q_1$, on a : $Q' = Q_1 + (X-\alpha)Q_1'$. D'où : $Q_1(\alpha) = Q'(\alpha)$.

On déduit de cette dernière égalité et de $(\clubsuit)$ que : $\lambda = \dfrac{P(\alpha)}{Q'(\alpha)}$.

Question de cours 4 — Propriété : soit $F \in \mathbb{K}(X)$, et soit α un pôle de multiplicité p de F. Il existe un unique couple (R, G) avec $R \in \mathbb{K}[X]$ de degré $< p$, et $G \in \mathbb{K}(X)$ n'admettant pas α pour pôle tel que :

$$F = G + \frac{R}{(X-\alpha)^p}$$

Preuve. Notons $F = P/Q$ sous forme irréductible. Puisque par hypothèse α est un pôle de multiplicité p de F, α est racine de multiplicité p de Q. Il s'ensuit que :

$$\exists Q_1 \in \mathbb{K}[X],\ [(Q = (X-\alpha)^p Q_1) \wedge (Q_1(\alpha) \neq 0)]$$

Les polynômes $(X-\alpha)^p$ et Q_1 sont premiers entre eux (puisque $(X-\alpha)$ ne divise pas Q_1). D'après le théorème de Bezout, il existe donc deux polynômes U et V de $\mathbb{K}[X]$ tels que :

$$U\,(X-\alpha)^p + VQ_1 = 1$$

On en déduit que :

$$F = \frac{P}{Q} = \frac{PU\,(X-\alpha)^p + PVQ_1}{(X-\alpha)^p\,Q_1} = \frac{PU}{Q_1} + \frac{PV}{(X-\alpha)^p}$$

On effectue alors la division euclidienne de PV par $(X-\alpha)^p$ pour écrire :

$$\exists\,(S, R) \in \mathbb{K}[X]^2, \quad PV = S\,(X-\alpha)^p + R \text{ avec } \deg(R) < p$$

On en déduit que :

$$F = \frac{P}{Q} = \frac{PU}{Q_1} + S + \frac{R}{(X-\alpha)^p}$$

Finalement, on pose : $G = \dfrac{PU}{Q_1} + S = \dfrac{PU + SQ_1}{Q_1}$. Ainsi, G est une fraction rationnelle n'admettant pas α pour pôle.

Conclusion. Si F est une fraction rationnelle admettant α pour pôle de multiplicité p, alors il existe un couple $(G, R) \in \mathbb{K}(X) \times \mathbb{K}[X]$ tel que G n'admet pas α pour pôle, R est de degré $< p$, et

$$F = G + \frac{R}{(X-\alpha)^p}$$

Reste à vérifier l'unicité : supposons qu'il existe deux couples (G_1, R_1) et (G_2, R_2) vérifiant les conditions de la conclusion ci-dessus. Alors en particulier :

$$G_1 - G_2 = \frac{R_2 - R_1}{(X-\alpha)^p}$$

Puisque α n'est pas un pôle de $G_1 - G_2$, on en déduit que α est racine de multiplicité au moins égale à p de $R_2 - R_1$. Or, les polynômes R_1 et R_2 étant de degré strictement inférieur ou égal à p, on a : $\deg(R_2 - R_1) < p$. Il s'ensuit que $R_2 - R_1 = 0$. Ce qui entraîne $(G_1, R_1) = (G_2, R_2)$, prouve l'unicité désirée, et achève la preuve de cette propriété.

Banque d'exercices

Exercice 1 — Décomposition en éléments simples de $F = \dfrac{1}{X^3 - X}$ dans $\mathbb{K}(X)$.

Exercice 2 — Décomposition en éléments simples de $F = \dfrac{1}{X(X-1)^2}$ dans $\mathbb{K}(X)$.

Exercice 3 — Décomposition en éléments simples de $F = \dfrac{1}{X^3 - 1}$ dans $\mathbb{C}(X)$ puis dans $\mathbb{R}(X)$.

Exercice 4 — Décomposition en éléments simples de $F = \dfrac{1}{X^n - 1}$ dans $\mathbb{C}(X)$ (avec $n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2$).

Exercice 5 — On note φ l'application qui à toute fraction rationnelle dans $\mathbb{K}(X)$ associe sa partie polaire.

Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{K}(X)$; déterminer $\ker\varphi$ et $\mathrm{im}\varphi$.

Pour information. Et comme vous avez été très sages cette semaine, voici donc l'énoncé général du théorème de décomposition en éléments simples !

Théorème (Décomposition en éléments simples). Soit $F = P/Q \in \mathbb{K}(X)$ une fraction rationnelle non nulle sous forme irréductible.

- Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Alors : $F = E + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} F_{\alpha_i} = E + \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{p_i-1} \frac{a_{ik}}{(X-\alpha_i)^{p_i-k}}$

  où l'on a noté E la partie entière de F, et $\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(X-\alpha_i)^{p_i}$ la décomposition en irréductibles de Q dans $\mathbb{C}[X]$;

- Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Alors : $F = E + \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{p_i-1} \frac{a_{ik}}{(X-\alpha_i)^{p_i-k}} + \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=0}^{q_j-1} \frac{b_{ik}X + c_{ik}}{(X^2+\beta_j X+\gamma_j)^{q_j-k}}$

  où l'on a noté E la partie entière de F, et $\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(X-\alpha_i)_i^p \prod_{j=1}^{m}\left(X^2+\beta_j X+\gamma_j\right)^{q_j}$ la décomposition en irréductibles de Q dans $\mathbb{R}[X]$.

Remarque. Cet énoncé n'est certainement pas à apprendre dans sa forme générale. En revanche, il faut l'invoquer dans les calculs de décomposition en éléments simples, pour justifier l'existence et la forme de la DES recherchée (cf 4 premiers exos de la banque).

Banque d'exercices - Corrigés

Exercice 1 — Décomposition en éléments simples de $F = \dfrac{1}{X^3 - X}$ dans $\mathbb{K}(X)$.

La fraction rationnelle F est de degré strictement négatif ($\deg F = -3$), et elle possède exactement trois pôles simples, qui sont 0 et ± 1. D'après le cours :

$$\exists!\ (a,b,c) \in \mathbb{K}^3, \qquad \frac{1}{X^3 - X} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X-1} + \frac{c}{X+1}$$

➤ **Valeur de** a. Puisque 0 est un pôle simple de F, on a : $a = \dfrac{P(0)}{Q'(0)}$, avec $P = 1$ et $Q' = 3X^2 - 1$. D'où : $a = -1$.

➤ **Valeur de** b. Puisque 1 est un pôle simple de F, on a : $b = \dfrac{P(1)}{Q'(1)}$. D'où : $b = \dfrac{1}{2}$.

➤ **Valeur de** c. Puisque -1 est un pôle simple de F, on a : $c = \dfrac{P(-1)}{Q'(-1)}$. D'où : $c = \dfrac{1}{2}$.

Conclusion. $\dfrac{1}{X^3 - X} = -\dfrac{1}{X} + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{X-1} + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{X+1}$

Exercice 2 — Décomposition en éléments simples de $F = \dfrac{1}{X(X-1)^2}$ dans $\mathbb{K}(X)$.

La fraction rationnelle F est de degré strictement négatif ($\deg F = -3$), et elle possède exactement un pôle simple (qui est 0) et un pôle double (qui est 1). D'après le cours :

$$\exists!\ (a,b,c) \in \mathbb{K}^3, \qquad \frac{1}{X(X-1)^2} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X-1} + \frac{c}{(X-1)^2}$$

➤ **Valeur de** a. Puisque 0 est un pôle simple de F, on a : $a = \dfrac{P(0)}{Q'(0)}$, avec $P = 1$ et $Q' = 3X^2 - 4X + 1$. D'où : $a = 1$.

➤ **Valeur de** c. Par multiplication (par $(X-1)^2$) et évaluation (en 1), on obtient : $c = 1$.

➤ **Valeur de** b. Par multiplication (par $(X-1)$) et passage à la limite (en $+\infty$), on obtient : $a + b = 0$. D'où : $b = -1$.

Conclusion. $\dfrac{1}{X(X-1)^2} = \dfrac{1}{X} - \dfrac{1}{X-1} + \dfrac{1}{(X-1)^2}$

Exercice 3 — Décomposition en éléments simples de $F = \dfrac{1}{X^3 - 1}$ dans $\mathbb{C}(X)$ puis dans $\mathbb{R}(X)$.

La fraction rationnelle F est de degré strictement négatif ($\deg F = -3$), et elle possède exactement trois pôles simples (dans $\mathbb{C}$), qui sont 1, j et $\bar{\mathrm{j}}$. D'après le cours :

$$\exists!\ (a,b) \in \mathbb{C}^2, \qquad \frac{1}{X^3 - 1} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X-\mathrm{j}} + \frac{\bar{b}}{X-\bar{\mathrm{j}}}$$

➤ **Valeur de** a. Puisque 1 est un pôle simple de F : $a = \dfrac{P(1)}{Q'(1)}$, avec $P = 1$ et $Q' = 3X^2$. D'où : $a = \dfrac{1}{3}$.

➤ **Valeur de** b. Puisque j est un pôle simple de F, on a : $b = \dfrac{P(\mathrm{j})}{Q'(\mathrm{j})}$. D'où : $b = \dfrac{1}{3\mathrm{j}^2} = \dfrac{\mathrm{j}}{3}$.

Conclusion 1. La décomposition en éléments simples de F dans $\mathbb{C}(X)$ est :

$$\frac{1}{X^3-1} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{X-1} + \frac{\mathrm{j}}{X-\mathrm{j}} + \frac{\bar{\mathrm{j}}}{X-\bar{\mathrm{j}}}\right)$$

On somme les deux termes non-réels pour achever l'exercice.

Conclusion 2. La décomposition en éléments simples de F dans $\mathbb{R}(X)$ est :

$$\frac{1}{X^3-1} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{X-1} - \frac{X+2}{X^2+X+1}\right)$$

Exercice 4 — Décomposition en éléments simples de $F = \dfrac{1}{X^n - 1}$ dans $\mathbb{C}(X)$ (avec $n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2$).

La fraction rationnelle $F = \dfrac{1}{X^n-1}$ admet exactement n pôles simples dans $\mathbb{C}$, qui sont les racines n-ièmes de l'unité. Il existe donc un (unique) n-uplet $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1})$ de complexes tels que :

$$\frac{1}{X^n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda_k}{X-\omega^k} = \frac{\lambda_0}{X-1} + \frac{\lambda_1}{X-\omega} + \cdots + \frac{\lambda_{n-1}}{X-\omega^{n-1}}$$

où l'on a noté comme d'habitude : $\omega = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/n}$.

Soit k un entier compris entre 0 et $n-1$. D'après le cours : $\lambda_k = \dfrac{1}{Q'\left(\omega^k\right)}$ avec $Q' = nX^{n-1}$

Or : $Q'\left(\omega^k\right) = n\left(\omega^k\right)^{n-1} = n\omega^{-k}$. Ainsi : $\lambda_k = \dfrac{1}{n}\,\omega^k$.

Conclusion. $$\frac{1}{X^n-1} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\omega^k}{X-\omega^k}$$

Exercice 5 — On note φ l'application qui à toute fraction rationnelle dans $\mathbb{K}(X)$ associe sa partie polaire.

Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{K}(X)$; déterminer $\ker\varphi$ et $\mathrm{im}\varphi$.

Soient F_1 et F_2 dans $\mathbb{K}(X)$. D'après le cours :

$$\exists!\ (E_1, E_2, G_1, G_2) \in \mathbb{K}[X]^2 \times \mathbb{K}(X)^2, \quad F_i = E_i + G_i \quad \text{et } \deg G_i < 0$$

Par définition de φ, on a : $\varphi(F_i) = G_i$.

Par ailleurs, pour tout couple de scalaires (λ, μ), on a : $\lambda F_1 + \mu F_2 = (\lambda E_1 + \mu E_2) + (\lambda G_1 + \mu G_2)$.

Dans le terme de droite de cette égalité, notons que : $\lambda E_1 + \mu E_2$ est un polynôme, et $\lambda G_1 + \mu G_2$ une fraction rationnelle de degré strictement négatif (propriétés du degré dans $\mathbb{K}(X)$).

Il s'ensuit que $\lambda G_1 + \mu G_2$ est la partie polaire de $\lambda F_1 + \mu F_2$.

Avec les notations de l'énoncé, ceci signifie que : $\varphi\left(\lambda F_1 + \mu F_2\right) = \lambda\varphi(F_1) + \mu\varphi(F_2)$.
Donc $\varphi \in \mathscr{L}\left(\mathbb{K}(X)\right)$.

Il est aisé de voir (et de justifier) que $\ker\varphi = \mathbb{K}[X]$, et que $\text{im}\varphi = \{F \in \mathbb{K}(X),\ \deg(F) < 0\}$.
Conclusion.