

NOM - Prénom :

MATHS - TEST DU 02/06/21

Le sujet est rédigé sur 2 pages, et est composé de 4 exercices indépendants.

Barème indicatif : Ex 1 : 6pts ; Ex 2 : 4pts ; Ex 3 : 7pts ; Ex 4 : 3pts

EXERCICE 1 — FRACTIONS RATIONNELLES

L'objet de cet exercice est d'établir que la série de terme général $u_n = \frac{4}{n^3 - n}$ est convergente et de calculer sa somme, c'est à dire de prouver que la limite

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\sum_{n=2}^N \frac{4}{n^3 - n} \right)$$

existe et est finie, et de déterminer sa valeur.

1/ Décomposer en irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $Q = X^3 - X$.

2/ On considère la fraction rationnelle :

$$F = \frac{4}{X^3 - X}$$

Déterminer la décomposition en éléments simples de F dans $\mathbb{R}(X)$.

3/ Soit N un entier naturel supérieur ou égal à 2. Calculer :

$$S_N = \sum_{n=2}^N \frac{4}{n^3 - n}$$

4/ En déduire : $\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N$.

EXERCICE 2 — SEV DE $\mathbb{R}[X]$, SEV DE $\mathbb{R}(X)$

Dans $\mathbb{R}[X]$, on considère les trois polynômes :

$$P = X - 2; \quad Q = X + 2; \quad \text{et} \quad R = X^2 - 4$$

1/ Démontrer que la famille $B = \{P, Q, R\}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

2/ Dans $\mathbb{K}(X)$ (l'espace vectoriel des fractions rationnelles à coefficients réels), on considère le sous-espace vectoriel :

$$F = \text{Vect} \left(\frac{1}{P}, \frac{1}{Q}, \frac{1}{R} \right)$$

Déterminer la dimension de F .

EXERCICE 3 — **SEV DE MATRICES**

Dans cet exercice, on note $E = M_2(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des matrices carrées à 2 lignes et 2 colonnes à coefficients réels.

On note $\mathbf{B} = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ la base canonique de E .

Enfin, on note :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1/ On considère le sev :

$$H = \text{Vect}(M_1, M_2, M_3)$$

Etablir que H est un hyperplan de E .

2/ Justifier que :

$$E = H \oplus \text{Vect}(I_2)$$

3/ On introduit à présent la famille :

$$\mathbf{B}' = \{M_1, M_2, M_3, I_2\}$$

Etablir que $\mathbf{B}'$ est une base de E .

4/ Ecrire la matrice de passage P de la base $\mathbf{B}$ à la base $\mathbf{B}'$.

5/ Donner les coordonnées de la matrice I_2 dans la base $\mathbf{B}$, ainsi que dans la base $\mathbf{B}'$.

EXERCICE 4 — **UN EXERCICE POLAIRE...**

D'après le cours, toute fraction rationnelle à coefficients réels peut s'écrire de manière unique comme somme d'un polynôme à coefficients réels, et d'une fraction rationnelle à coefficients réels de degré strictement négatif.

Plus formellement, l'affirmation précédente signifie que pour toute fraction rationnelle $F \in \mathbb{R}(X)$:

$$\exists! (R, G) \in \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}(X), [F = R + G \quad \text{et} \quad \deg(G) < 0]$$

On rappelle que le polynôme R est appelé **partie entière** de F , et la fraction rationnelle G **partie polaire** de F .

On considère l'application φ , qui à une fraction rationnelle associe sa partie polaire :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}(X) &\longrightarrow \mathbb{R}(X) \\ F = R + G &\longmapsto G \end{aligned}$$

Question. Etablir que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}(X)$, et préciser son image et son noyau.