Maths - Corrigé du test du 02/06/21

Exercice 1 — Fractions rationnelles

L'objet de cet exercice est d'établir que *la série de terme général* $u_n = \dfrac{4}{n^3 - n}$ *est convergente et de calculer sa somme*, c'est à dire de prouver que la limite

$$\lim_{N \to +\infty} \left(\sum_{n=2}^{N} \frac{4}{n^3 - n} \right) \text{ existe et est finie, et de déterminer sa valeur.}$$

1/ Décomposer en irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $Q = X^3 - X$.

La décomposition en irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ de Q est : $Q = X(X-1)(X+1)$.

2/ On considère la fraction rationnelle : $\quad F = \dfrac{4}{X^3 - X}$

Déterminer la décomposition en éléments simples de F dans $\mathbb{R}(X)$.

D'après la question précédente : $F = \dfrac{4}{X(X-1)(X+1)}$.

Puisque F est une fraction rationnelle de degré strictement négatif n'ayant que des pôles simples, le théorème de décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ assure l'existence et l'unicité d'un triplet de réels (a, b, c) tel que :

$$F = \frac{a}{X} + \frac{b}{X-1} + \frac{c}{X+1}$$

D'après le cours :

$$a = \frac{P(0)}{Q'(0)}\,; \qquad b = \frac{P(1)}{Q'(1)}\,; \qquad c = \frac{P(-1)}{Q'(-1)}$$

en ayant pris soin de noter $P = 4$ et $Q = X^3 - X$. On en déduit que :

$$a = -4\,; \qquad b = 2\,; \qquad c = 2$$

Conclusion. La décomposition en éléments simples de F dans $\mathbb{R}(X)$ est : $F = \dfrac{2}{X-1} - \dfrac{4}{X} + \dfrac{2}{X+1}$

3/ Soit N un entier naturel supérieur ou égal à 2. Calculer : $\quad S_N = \displaystyle\sum_{n=2}^{N} \frac{4}{n^3 - n}$.

Soit N un entier naturel $\geqslant 2$. D'après la question précédente :

$$S_N = \sum_{n=2}^{N} \left(\frac{2}{n-1} - \frac{4}{n} + \frac{2}{n+1} \right) = \sum_{n=2}^{N} \left(\frac{2}{n-1} - \frac{2}{n} - \frac{2}{n} + \frac{2}{n+1} \right) = \sum_{n=2}^{N} \left(\frac{2}{n-1} - \frac{2}{n} \right) + \sum_{n=2}^{N} \left(\frac{2}{n+1} - \frac{2}{n} \right)$$

$$= 2 - \frac{2}{N} + \frac{2}{N+1} - 1 = 1 - \frac{2}{N} + \frac{2}{N+1}$$

Conclusion. $\forall\, N \in \mathbb{N},\ N \geqslant 2,\ S_N = 1 - \dfrac{2}{N} + \dfrac{2}{N+1}$

4/ En déduire : $\displaystyle\lim_{N \to +\infty} S_N$. D'après la question précédente : $\displaystyle\lim_{N \to +\infty} \frac{4}{n^3 - n} = 1$

Avec la terminologie du chap 25 : **la série de terme général $u_n = \dfrac{4}{n^3 - n}$ est convergente et a pour somme 1.**

Exercice 2 — Sev de $\mathbb{R}[X]$, sev de $\mathbb{R}(X)$

Dans $\mathbb{R}[X]$, on considère les trois polynômes :

$$P = X - 2\,; \qquad Q = X + 2\,; \qquad \text{et} \qquad R = X^2 - 4$$

1/ Démontrer que la famille $B = \{P, Q, R\}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Soient a, b et c trois réels tels que : $aP + bQ + cR = 0$.

Alors : $a(X-2) + b(X+2) + c(X^2-4) = 0$. Par évaluation en 2, on a : $4b = 0$. D'où : $b = 0$.

D'où : $a(X-2) + c(X^2-4) = 0$. Par évaluation en -2, on a : $-4a = 0$. D'où : $a = 0$.

D'où : $c(X^2-4) = 0$. D'où : $c = 0$.

En résumé : $[aP + bQ + cR = 0] \Longrightarrow [a = b = c = 0]$.

On en déduit que la famille B est libre. Puisqu'en outre son cardinal est égal à la dimension de $\mathbb{R}_2[X]$, on peut conclure.
Conclusion. B est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

2/ Dans $\mathbb{K}(X)$ (l'espace vectoriel des fractions rationnelles à coefficients réels), on considère le sous-espace vectoriel :

$$F = \text{Vect}\left(\frac{1}{P}, \quad \frac{1}{Q}, \quad \frac{1}{R}\right)$$

Déterminer la dimension de F.

Puisque $X^2 - 4 = (X-2)(X+2)$, le théorème de la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ assure que :

$$\frac{1}{R} \in \text{Vect}\left(\frac{1}{P}, \frac{1}{Q}\right). \qquad \text{D'où : } F = \text{Vect}\left(\frac{1}{P}, \quad \frac{1}{Q}\right).$$

Puisque $\dfrac{1}{P}$ et $\dfrac{1}{Q}$ ne sont pas colinéaires, on en déduit que la famille $\left\{\dfrac{1}{P}, \quad \dfrac{1}{Q}\right\}$ est une base de F.

Conclusion. $\dim F = 2$.

Exercice 3 — Sev de matrices

Dans cet exercice, on note $E = \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices carrées à 2 lignes et 2 colonnes à coefficients réels.

On note $\mathbf{B} = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ la base canonique de E.

Enfin, on note :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1/ On considère le sev :

$$H = \text{Vect}\,(M_1, M_2, M_3)$$

Etablir que H est un hyperplan de E.

Soient a, b et c trois réels tels que : $aM_1 + bM_2 + cM_3 = 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}$. Alors : $\begin{pmatrix} a & b+c \\ b-c & 2a \end{pmatrix} = 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}$. D'où : $a = b = c = 0$.

La famille $\{M_1, M_2, M_3\}$ est donc libre, et génératrice de H : par suite, c'est une base de H.
Conclusion. $\dim H = 3$. Donc H est un hyperplan de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ (puisque $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ est de dimension 4).

2/ Justifier que :

$$E = H \bigoplus \text{Vect}(\mathrm{I}_2)$$

Si I_2 appartenait à H, il existerait trois réels a, b et c tels que : $\mathrm{I}_2 = aM_1 + bM_2 + cM_3 = 0$. Cette égalité impliquerait en particulier : $a = 2a = 1$, ce qui est absurde. Donc : $\mathrm{I}_2 \notin H$.

Conclusion. Puisque H est un hyperplan de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, et que $\mathrm{I}_2 \notin H$, le cours assure que : $E = H \bigoplus \text{Vect}(\mathrm{I}_2)$.

3/ On introduit à présent la famille :

$$\mathbf{B'} = \{M_1, M_2, M_3, \mathrm{I}_2\}$$

Etablir que **B'** est une base de E.

D'après la question précédente et l'énoncé, on a :

$$E = H + \text{Vect}(\mathrm{I}_2) = \text{Vect}\,(M_1, M_2, M_3) + \text{Vect}(\mathrm{I}_2) = \text{Vect}(M_1, M_2, M_3, \mathrm{I}_2)$$

Il s'ensuit que **B'** est génératrice de E. Puisqu'en outre son cardinal est égal à la dimension de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, on peut conclure.

Conclusion. **B'** est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

4/ Ecrire la matrice de passage P de la base **B** à la base **B'**.

D'après le cours : $P_{\mathbf{BB'}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5/ Donner les coordonnées de la matrice I_2 dans la base **B**, ainsi que dans la base **B'**.

On a : $\mathrm{I}_2 = E_{11} + E_{22}$, et $\mathrm{I}_2 = \mathrm{I}_2 \ldots$

Les coordonnées de la matrice I_2 dans la base **B** sont donc : $(1, 0, 0, 1)$.

Les coordonnées de la matrice I_2 dans la base **B'** sont donc : $(0, 0, 0, 1)$.

Exercice 4 — Un exercice polaire...

D'après le cours, toute fraction rationnelle à coefficients réels peut s'écrire de manière unique comme somme d'un polynôme à coefficients réels, et d'une fraction rationnelle à coefficients réels de degré strictement négatif.

Plus formellement, l'affirmation précédente signifie que pour toute fraction rationnelle $F \in \mathbb{R}(X)$:

$$\exists!\,(R, G) \in \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}(X),\ [F = R + G \quad \text{et} \quad \deg(G) < 0]$$

On rappelle que le polynôme R est appelé **partie entière** de F, et la fraction rationnelle G **partie polaire** de F.

On considère l'application φ, qui à une fraction rationnelle associe sa partie polaire :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}(X) &\longrightarrow \mathbb{R}(X) \\ F = R + G &\longmapsto G \end{aligned}$$

Question. Etablir que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}(X)$, et préciser son image et son noyau.

Soient F_1 et F_2 dans $\mathbb{R}(X)$. Alors :

$$\exists!\,(R_1, R_2, G_1, G_2) \in \mathbb{R}[X]^2 \times \mathbb{R}(X)^2,\ [F_1 = R_1 + G_1,\ F_2 = R_2 + G_2, \quad \deg(G_1) < 0\text{et} \quad \deg(G_2) < 0]$$

Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$\lambda F_1 + \mu F_2 = \underbrace{(\lambda R_1 + \mu R_2)}_{R} + \underbrace{(\lambda G_1 + \mu G_2)}_{G}$$

Dans cette écriture, R est trivialement un polynôme, et G est une fraction rationnelle de degré strictement négatif (puisque G_1 et G_2 le sont, et d'après les propriétés du degré dans $\mathbb{R}(X)$).

On en déduit que R est la partie entière de $\lambda F_1 + \mu F_2$, et G sa partie polaire. En particulier :

$$\varphi(\lambda F_1 + \mu F_2) = G = \lambda G_1 + \mu G_2 = \lambda \varphi(F_1) + \mu \varphi(F_2)$$

Ce qui prouve que φ est linéaire. Puisqu'en outre φ est définie et à valeurs dans $\mathbb{R}(X)$, c'est un endomorphisme de $\mathbb{R}(X)$.

➢ Soit $F \in \mathbb{R}(X)$. Reprenons la notation utilisée depuis le début de l'exo : $F = R + G$. On a :

$$F \in \ker \varphi \Longleftrightarrow \varphi(F) = 0_{\mathbb{R}(X)} \Longleftrightarrow G = 0_{\mathbb{R}(X)} \Longleftrightarrow F \in \mathbb{R}[X]$$

D'où : $\ker \varphi = \mathbb{R}[X]$.

Par ailleurs, pour tout $F \in \mathbb{R}(X)$, $\varphi(F)$ est une fraction rationnelle de degré strictement négatif. Et réciproquement, si F est une fraction rationnelle de degré strictement négatif, alors $F = \varphi(F)$, donc F appartient à l'image de φ.

En résumé, l'image de φ est l'ensemble des fractions rationnelles de degré strictement négatif.

Conclusion. φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}(X)$, $\ker \varphi = \mathbb{R}[X]$ et $\mathrm{im}\ \varphi = \mathbb{R}(X)_{<0}$.[1]

Remarque 1. L'endomorphisme φ est non surjectif et non injectif.

Remarque 2. $\mathbb{R}(X)_{<0}$ est un sev de $\mathbb{R}(X)$, et on a : $\mathbb{R}(X) = \mathbb{R}[X] \bigoplus \mathbb{R}(X)_{<0}$.

Remarque 3. L'endomorphisme φ est la projection sur $\mathbb{R}(X)_{<0}$ parallèlement à $\mathbb{R}[X]$.

1. En ayant noté $\mathbb{R}(X)_{<0}$ la partie de $\mathbb{R}(X)$ constituée des fractions rationnelles de degré strictement négatif.