Devoir surveillé 10 — 4 mai 2019

Ce devoir est composé de 2 exercices, et de 2 problèmes ; il est rédigé sur 4 pages.

La clarté des raisonnements, la précision de la rédaction et la présentation entreront pour une part non négligeable dans l'appréciation des copies. Les résultats non justifiés ou non encadrés ne seront pas pris en compte. L'utilisation de tout document, de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Barème indicatif : Ex1 : 8pts — Ex2 : 7pts — Pb1 : 21pts (6+6+4+2+3)

Pb2 : 16pts (7+6+3) — Total : 52pts

Exercice 1 — (Polynômes de Tchebychev).

On donne dans cet exercice une présentation des polynômes de Tchebychev, alternative à celle vue en cours.

L'objectif des questions 1 et 2 est d'établir que pour tout entier naturel n, il existe un unique polynôme T_n à coefficients réels tel que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \qquad T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$$

Cet unique polynôme T_n est appelé **n-ème polynôme de Tchebychev** (de première espèce).

1/ Unicité. Soit n un entier naturel, et soient P et Q deux polynômes tels que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad P\left(\cos(\theta)\right) = \cos(n\theta) \ \wedge \ Q\left(\cos(\theta)\right) = \cos(n\theta)$$

Montrer que $P = Q$.

2/ Existence et expression. Soient n un entier naturel et θ un réel.

a/ Etablir que : $$\cos(n\theta) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{i}^k \sin^k(\theta)\cos^{n-k}(\theta)\right)$$

b/ Soit $n \in \mathbb{N}$. Déduire de ce qui précède que : $$T_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} \left(X^2-1\right)^k X^{n-2k}.$$

3/ Déduire de la question précédente que T_n est de degré au plus égal à n.

4/ Soit n un entier naturel non nul. Pour tout entier $k \in [\![\, 0, n-1 \,]\!]$, on pose :

$$x_k = \cos\left(\frac{2k+1}{2n}\,\pi\right)$$

a/ Vérifier que les réels $x_0, \ldots, x_{n-1}$ sont racines du polynôme T_n.

b/ Etablir que les seules racines de T_n sont les réels $x_0, \ldots, x_{n-1}$, et que ces racines sont simples.

Exercice 2 — **(Fraction rationnelle).**

1/ On considère la fraction rationnelle : $F = \dfrac{3X^2 - X + 10}{X^4 + 2X^3 - 7X^2 - 8X + 12}$.

a/ Quel est le degré de F ? Quelle est sa partie entière ?

b/ Décomposer en éléments simples F dans $\mathbb{R}(X)$.

Indication : les réels 1 *et* 2 *sont racines du dénominateur.*

2/ Pour tout entier $N \geqslant 3$, on pose : $S_N = \displaystyle\sum_{n=3}^{N} \frac{3n^2 - n + 10}{n^4 + 2n^3 - 7n^2 - 8n + 12}$.

a/ Calculer S_N pour tout entier $N \geqslant 3$.

b/ Déduire de la question précédente que la suite $(S_N)_N$ est convergente, et préciser $\displaystyle\lim_{N \to +\infty} S_N$.

Problème 1 — **(Symétries d'un espace vectoriel).**

L'objectif principal de ce problème est d'étudier les propriétés des symétries dans un espace vectoriel, de manière analogue à ce que nous avons vu en classe pour les projections.

Rappel des notations et définitions du cours. Soit E un $\mathbb{K}$-ev ; soient F et G deux sev supplémentaires de E (c'est à dire : $E = F \bigoplus G$).

Dans ce contexte : $\forall \overrightarrow{v} \in E, \quad \exists! \left(\overrightarrow{f}, \overrightarrow{g}\right) \in F \times G, \quad \overrightarrow{v} = \overrightarrow{f} + \overrightarrow{g}$.

Ces hypothèses et notations étant posées, on appelle :

➤ **projection sur** F **parallèlement à** G l'application p_F de E dans E définie en posant $p_F\left(\overrightarrow{v}\right) = \overrightarrow{f}$;

➤ **symétrie par rapport à** F **parallèlement à** G l'application s_F de E dans E définie en posant $s_F\left(\overrightarrow{v}\right) = \overrightarrow{f} - \overrightarrow{g}$.

Partie I — Exemple

Dans cette partie, E désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices carrées de taille 2 à coefficients réels. On pose $F = \mathrm{Vect}(\mathrm{I}_2)$, et on note G l'ensemble des matrices de E de trace nulle.

1/ Montrer que G est un sev de E, et en déterminer une famille génératrice.

2/ Montrer que F et G sont supplémentaires dans E.

3/ Donner l'expression de la projection p_F sur F parallèlement à G.[*]

4/ Donner l'expression de la symétrie s_F par rapport à F parallèlement à G.

∗. Il s'agit d'expliciter l'image d'une matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ par l'application p_F.

Partie II — Généralités sur les projections et symétries

On revient à présent au cas général : dans toute cette partie, E désigne un $\mathbb{K}$-ev, et F et G deux sev supplémentaires dans E ($E = F \bigoplus G$).

5/ Montrer que l'application s_F est un endomorphisme de E.

6/ Justifier que $s_F \in \mathrm{GL}(E)$.

7/ Etablir une relation entre les endomorphismes s_F, p_F et p_G.

8/ Déterminer $\ker(s_F - \mathrm{id}_E)$ et $\ker(s_F + \mathrm{id}_E)$.

Partie III — Réflexions dans un espace vectoriel

Dans cette partie, E désigne un $\mathbb{K}$-ev. Un endomorphisme f de E est appelé une **réflexion** si $f^2 = \mathrm{id}_E$; en d'autres termes, une réflexion de E est une involution linéaire de E.

Soit s un endomorphisme de E.

9/ Montrer que si s est une réflexion, alors $E = \ker(s - \mathrm{id}_E) \bigoplus \ker(s + \mathrm{id}_E)$.

10/ Réciproquement, montrer que si $E = \ker(s - \mathrm{id}_E) \bigoplus \ker(s + \mathrm{id}_E)$, alors l'endomorphisme s est une réflexion.

Partie IV — Synthèse : toute réflexion est une symétrie

Dans cette partie, E désigne toujours un $\mathbb{K}$-ev, et s un endomorphisme de E.

11/ Montrer que si s est une réflexion, alors s est une symétrie par rapport à F parallèlement à G, où F et G sont deux sev de E que l'on précisera.

Partie V — Application

On définit une application $u : \mathrm{M}_2(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathrm{M}_2(\mathbb{K})$ en posant pour toute $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{K})$:

$$u(M) = \begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix}$$

On admet que u est un endomorphisme de $\mathrm{M}_2(\mathbb{K})$.

12/ Etablir que $\ker\left(u - \mathrm{id}_{\mathrm{M}_2(\mathbb{K})}\right) = \mathrm{Vect}(M_1, M_2)$, où M_1 et M_2 sont deux matrices que l'on explicitera.

13/ Déterminer $\ker\left(u + \mathrm{id}_{\mathrm{M}_2(\mathbb{K})}\right)$, et en préciser une famille génératrice.

14/ Montrer que : $\quad \mathrm{M}_2(\mathbb{K}) = \ker(u - \mathrm{id}_E) \bigoplus \ker(u + \mathrm{id}_E)$.

Problème 2 — **(Etude d'un endomorphisme de $\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$).**

Dans tout le problème, on identifie $\mathbb{R}[X]$ à l'ensemble des fonctions polynomiales.

On note $\mathbf{E}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles, c'est à dire que $\mathbf{E} = \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Pour tout élément f de $\mathbf{E}$, on note $U(f)$ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad [U(f)]\,(x) = \int_{x-1}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Partie I — Généralités sur l'application U

1/ Soit $f \in \mathbf{E}$, T-périodique. Montrer que : $\forall\, a \in \mathbb{R}, \displaystyle\int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t.$

2/ On suppose dans cette question que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

- **a/** Montrer que si f est T-périodique, alors f' est T-périodique.
- **b/** Montrer que la réciproque de l'implication précédente est fausse, en exhibant un exemple de fonction dérivable f telle que f' est périodique, mais f ne l'est pas.

3/ On revient au cas général, en considérant $f \in \mathbf{E}$. Etablir que $U(f)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et calculer sa dérivée.

4/ Montrer que l'application U qui à f associe $U(f)$ est un endomorphisme de $\mathbf{E}$.

Partie II — Restriction de U à $\mathbb{R}_n[X]$

Dans cette partie, n désigne un entier naturel non nul. On note $\mathbf{E_n} = \mathbb{R}_n[X]$.

5/ Soit k un entier de $[\![\, 0, n \,]\!]$. Etablir que $U\left(X^k\right)$ est une fonction polynomiale de degré k.

6/ Montrer que la restriction $U_{|\mathbf{E_n}}$ de U à $\mathbf{E_n}$ définit un endomorphisme de $\mathbf{E_n}$ (par la suite, on notera U_n cet endomorphisme).

7/ On note $\mathscr{F}$ la famille $\{U_n(1), U_n(X), \ldots, U_n(X^n)\}$.

- **a/** Justifier que la famille $\mathscr{F}$ est libre.
- **b/** En déduire que U_n est injectif. Puis établir que U_n est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Partie III — Noyau de U

8/ Soit $f \in \mathbf{E}$. Justifier que si f appartient à $\ker(U)$, alors :

(i) $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0\,;$ $\qquad$ (ii) f est périodique de période 1

9/ A-t-on : $\ker(U) = \left\{ f \in \mathbf{E} \,/\, f \text{ pérodique de période 1 et telle que } \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}$?

10/ L'endomorphisme U est-il injectif ? Est-il surjectif ?