Corrigé du DS 10 — 4 mai 2019

Exercice 1 — (Polynômes de Tchebychev).

L'objectif des questions 1 et 2 est d'établir que pour tout entier naturel n, il existe un unique polynôme T_n à coefficients réels tel que : $\forall\,\theta \in \mathbb{R}, \qquad T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$.

Cet unique polynôme T_n est appelé n**-ème polynôme de Tchebychev** (de première espèce).

1/ **Unicité**. Soit n un entier naturel, et soient P et Q deux polynômes tels que :

$$\forall\,\theta \in \mathbb{R}, \quad P\left(\cos(\theta)\right) = \cos(n\theta) \ \wedge \ Q\left(\cos(\theta)\right) = \cos(n\theta)$$

Alors pour tout réel θ, on a : $P\left(\cos(\theta)\right) = Q\left(\cos(\theta)\right)$. Il s'ensuit que P et Q coïncident en une infinité de réels (tous les réels de $[-1, 1]$). D'après le principe du prolongement algébrique, ils sont égaux.

Conclusion. $[\forall\,\theta \in \mathbb{R}, \quad P\left(\cos(\theta)\right) = \cos(n\theta) \ \wedge \ Q\left(\cos(\theta)\right) = \cos(n\theta)] \Longrightarrow [P = Q]$.

2/ **Existence et expression**. Soient n un entier naturel et θ un réel.

a/ D'après la formule de Moivre : $\cos(n\theta) = \mathrm{Re}\left[(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta))^n\right]$.

D'après la formule du binôme de Newton : $\cos(n\theta) = \mathrm{Re}\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} i^k \sin^k(\theta)\cos^{n-k}(\theta)\right)$.

Conclusion. $\forall\,(n, \theta) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}, \ \cos(n\theta) = \mathrm{Re}\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} i^k \sin^k(\theta)\cos^{n-k}(\theta)\right)$

b/ Soient θ un réel et n un entier naturel. D'après la question précédente, on a :

$$\cos(n\theta) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{i}^k \sin^k(\theta)\cos^{n-k}(\theta)\right)$$

Puisque i^k est réel si et seulement si k est pair, on a donc :

$$\cos(n\theta) = \sum_{k=0,\ k \text{ pair}}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{i}^k \sin^k(\theta)\cos^{n-k}(\theta)$$

Il reste à observer que les entiers pairs compris entre 0 et n sont exactement ceux de l'ensemble :

$$\left\{2k' \ / \ k' \in [\![\, 0, \left\lfloor \tfrac{n}{2} \right\rfloor \,]\!]\right\}$$

On en déduit que : $\cos(n\theta) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} (-1)^k \sin^{2k}(\theta)\cos^{n-2k}(\theta) \qquad (\spadesuit)$

Or : $(-1)^k \sin^{2k}(\theta) = \left(-\sin^2(\theta)\right)^k = \left(\cos^2(\theta) - 1\right)^k \qquad (\clubsuit)$

D'après $(\spadesuit)$ et $(\clubsuit)$: $\cos(n\theta) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} \left(\cos^2(\theta) - 1\right)^k \cos^{n-2k}(\theta)$

On pose alors : $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} \left(X^2 - 1\right)^k X^{n-2k}$.

Il résulte des calculs précédents que : $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$. D'après la question 1, T_n est l'unique polynôme de $\mathbb{R}[X]$ tel que : $\forall\, \theta \in \mathbb{R}, \quad T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$.

Conclusion. Le n-ème polynôme de Tchebychev est : $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} \left(X^2-1\right)^k X^{n-2k}$.

3/ Soit k un entier compris entre 0 et $\dfrac{n}{2}$.

On a : $\deg\left[\left(X^2-1\right)^k X^{n-2k}\right] = \deg\left[\left(X^2-1\right)^k\right] + \deg\left[X^{n-2k}\right] = 2k + n - 2k = n$.

Il résulte donc de la question précédente que T_n est une somme de polynômes de degré n. Puisque le degré d'une somme est majoré par le maximum des degrés des termes de la somme, on en déduit que : $\deg\left(T_n\right) \leqslant n$.

Conclusion. $\deg(T_n) \leqslant n$.

4/ a/ Soit k un entier de $[\![\, 0, n-1 \,]\!]$. On a :

$$T_n(x_k) = T_n\left(\cos\left(\frac{2k+1}{2n}\,\pi\right)\right) = \cos\left(n \times \frac{2k+1}{2n}\,\pi\right) = \cos\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)\,\pi\right) = 0$$

la première égalité provenant de la définition de x_k, la seconde de la propriété caractéristique du polynôme T_n, et la dernière du fait que le réel $\left(k+\dfrac{1}{2}\right)\pi$ est congru à $\dfrac{\pi}{2}$ modulo π.

Conclusion. $\forall\, k \in [\![\, 0, n-1 \,]\!],\ T_n\left(x_k\right) = 0$.

b/ Les réels $\dfrac{2k+1}{2n}\,\pi$, pour $k \in [\![\, 0, n-1 \,]\!]$, sont n réels deux à deux distincts de $[0, \pi]$.

La fonction cos étant strictement monotone sur $[0, \pi]$, sa restriction à cet intervalle est injective. Il s'ensuit que les réels x_k, pour $k \in [\![\, 0, n-1 \,]\!]$, sont n réels deux à deux distincts.

En outre, d'après la question précédente, ces réels sont racines du polynôme T_n, dont le degré est majoré par n d'après la question 3. Puisqu'un polynôme non nul ne peut posséder strictement plus de racines comptées avec multiplicité que son degré, il s'ensuit que les n réels $x_0, \ldots, x_{n-1}$ sont exactement les n racines de T_n, et qu'elles sont simples. *

Exercice 2 — (Fraction rationnelle).

1/ On considère la fraction rationnelle : $\quad F = \dfrac{3X^2 - X + 10}{X^4 + 2X^3 - 7X^2 - 8X + 12}$.

a/ D'après le cours : $\deg\left(\dfrac{3X^2 - X + 10}{X^4 + 2X^3 - 7X^2 - 8X + 12}\right) = -2$. La partie entière de F est donc nulle.

b/ Notons $Q = X^4 + 2X^3 - 7X^2 - 8X + 12$. D'après l'énoncé, Q admet 1 et 2 pour racines. Il s'ensuit que $(X-1)(X-2)$ divise le polynôme Q.

En effectuant la division euclidienne de Q par $(X-1)(X-2)$, on obtient : $Q = (X-1)\,(X-2)(X^2+5X+6)$. Le polynôme du second degré se factorisant aisément, on en déduit que : $Q = (X-1)(X-2)(X+2)(X+3)$.

Par suite : $F = \dfrac{3X^2 - X + 10}{(X-1)(X-2)(X+2)(X+3)}$.

*. Et que le degré de T_n est exactement égal à n.

On déduit de cette écriture et du théorème de la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ que :

$$\exists!\ (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4,\ F = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X-2} + \frac{c}{X+2} + \frac{d}{X+3}$$

Puisque F ne possède que des pôles simples, les réels a, b, c et d peuvent être trouvés à l'aide de la formule du cours idoine.[†]

En notant $P = 3X^2 - X + 10$, et $Q = X^4 + 2X^3 - 7X^2 - 8X + 12$, on a : $Q' = 4X^3 + 6X^2 - 14X - 8$. Par conséquent :

$$a = \frac{P(1)}{Q'(1)} = \frac{12}{-12} = -1\,; \quad b = \frac{P(2)}{Q'(2)} = \frac{20}{20} = 1\,; \quad c = \frac{P(-2)}{Q'(-2)} = \frac{24}{12} = 2\,; \quad d = \frac{P(-3)}{Q'(-3)} = \frac{40}{-20} = -2.$$

Conclusion. $\boxed{\dfrac{3X^2 - X + 10}{(X-1)(X-2)(X+2)(X+3)} = \dfrac{1}{X-2} - \dfrac{1}{X-1} + \dfrac{2}{X+2} - \dfrac{2}{X+3}}$.

2/ Soit un entier $N \geqslant 3$. D'après la question précédente :

$$S_N = \sum_{n=3}^{N} \frac{3n^2 - n + 10}{n^4 + 2n^3 - 7n^2 - 8n + 12} = \sum_{n=3}^{N} \left[\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1} + \frac{2}{n+2} - \frac{2}{n+3}\right]$$

D'où : $S_N = \left(\displaystyle\sum_{n=3}^{N} \left[\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1}\right]\right) + 2\left(\displaystyle\sum_{n=3}^{N} \left[\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right]\right)$

Ayant reconnu deux sommes téléscopiques, on en déduit que :

$$S_N = 1 - \frac{1}{N-1} + 2\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{N+3}\right) = \frac{7}{5} - \frac{1}{N-1} - \frac{2}{N+3}$$

Conclusion. $\boxed{\forall\, N \in \mathbb{N},\ N \geqslant 3,\ S_N = \dfrac{7}{5} - \dfrac{1}{N-1} - \dfrac{2}{N+3}}$

3/ On déduit immédiatement de ce qui précède que : $\boxed{(S_N)_N \text{ est convergente, et } \lim\limits_{N\to+\infty} S_N = \dfrac{7}{5}}$.

Problème 1 — (Symétries d'un espace vectoriel).

Rappel des notations et définitions du cours. Soit E un $\mathbb{K}$-ev ; soient F et G deux sev supplémentaires de E (c'est à dire : $E = F \bigoplus G$).

Dans ce contexte : $\quad \forall\, \overrightarrow{v} \in E, \quad \exists!\, \left(\overrightarrow{f}, \overrightarrow{g}\right) \in F \times G, \quad \overrightarrow{v} = \overrightarrow{f} + \overrightarrow{g}.$

Ces hypothèses et notations étant posées, on appelle :

- **projection sur F parallèlement à G** l'application p_F de E dans E définie en posant $p_F\left(\overrightarrow{v}\right) = \overrightarrow{f}$;
- **symétrie par rapport à F parallèlement à G** l'application s_F de E dans E définie en posant
$$s_F\left(\overrightarrow{v}\right) = \overrightarrow{f} - \overrightarrow{g}.$$

†. "$\dfrac{P(\alpha)}{Q'(\alpha)}$". Les coefficients a, b, c et d peuvent également être obtenus par "multiplication/évaluation".

Partie I — Exemple

Dans cette partie, E désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices carrées de taille 2 à coefficients réels. On pose $F = \mathrm{Vect}(\mathrm{I}_2)$, et on note G l'ensemble des matrices de E de trace nulle.

1/ a/ Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$. Alors : $[M \in G]$

$$\iff \left[\exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}\right] \iff [\exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ M = a(E_{11} - E_{22}) + bE_{12} + cE_{21}]$$

On en déduit que : $\boxed{G = \mathrm{Vect}((E_{11} - E_{22}), E_{12}, E_{21}) \text{ (en particulier } G \text{ est un sev de } \mathrm{M}_2(\mathbb{R}))}$.

b/ Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$. Il existe quatre réels a, b, c et d tels que : $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On cherche à présent quatre réels x, y, z et t tels que : $M = x\mathrm{I}_2 + y(E_{11} - E_{22}) + zE_{12} + tE_{21}$. Cette égalité entre matrices donne lieu au système :

$$\begin{cases} x + y = a \\ z = b \\ t = c \\ x - y = d \end{cases} \text{ dont la résolution aisée donne : } \begin{cases} x = (a+d)/2 \\ z = b \\ t = c \\ y = (a-d)/2 \end{cases}$$

Ainsi, la matrice M peut s'écrire comme somme d'une matrice dans F et d'une matrice dans G, explicitement :

$$M = \underbrace{\begin{pmatrix} (a+d)/2 & 0 \\ 0 & (a+d)/2 \end{pmatrix}}_{\in F} + \underbrace{\begin{pmatrix} (a-d)/2 & b \\ c & (d-a)/2 \end{pmatrix}}_{\in G}$$

En outre, cette écriture est unique (unicité de la solution du système précédent). Par suite : $\boxed{\mathrm{M}_2(\mathbb{R}) = F \bigoplus G}$.

c/ D'après la question précédente, la projection p_F sur F parallèlement à G est donnée par :

$$\boxed{\forall\, M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}),\ p_F(M) = \begin{pmatrix} (a+d)/2 & 0 \\ 0 & (a+d)/2 \end{pmatrix}}.$$

d/ D'après la question précédente, la symétrie s_F par rapport à F parallèlement à G est donnée par :

$$\forall\, M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}),\ s_F(M) = \begin{pmatrix} (a+d)/2 & 0 \\ 0 & (a+d)/2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (a-d)/2 & b \\ c & (d-a)/2 \end{pmatrix}$$

soit : $\boxed{\forall\, M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}),\ s_F(M) = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}$.

Partie II — Généralités sur les projections et symétries

On revient à présent au cas général : dans toute cette partie, E désigne un $\mathbb{K}$-ev, et F et G deux sev supplémentaires dans E ($E = F \bigoplus G$).

5/ Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v} \in E$, et soient λ et μ deux scalaires. Par hypothèse, il existe $\overrightarrow{f}$ et $\overrightarrow{f'}$ dans F, $\overrightarrow{g}$ et $\overrightarrow{g'}$ dans G uniques tels que : $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{f} + \overrightarrow{g}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{f'} + \overrightarrow{g'}$. Alors on a : $\lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v} = \underbrace{\left(\lambda\overrightarrow{f} + \mu\overrightarrow{f'}\right)}_{\in F} + \underbrace{\left(\lambda\overrightarrow{g} + \mu\overrightarrow{g'}\right)}_{\in G}$.

D'où :

$$s_F(\lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}) = \left(\lambda\overrightarrow{f} + \mu\overrightarrow{f'}\right) - \left(\lambda\overrightarrow{g} + \mu\overrightarrow{g'}\right) = \lambda\left(\overrightarrow{f} - \overrightarrow{g}\right) + \mu\left(\overrightarrow{f'} - \overrightarrow{g'}\right) = \lambda s_F(\overrightarrow{u}) + \mu s_F(\overrightarrow{v})$$

$\boxed{\textbf{Conclusion. } s_F \in \mathscr{L}(E)}$.

6/ D'après la question précédente, s_F est linéaire, et il est clair que $s_F^2 = \mathrm{id}_E$ (s_F est une involution). Donc s_F est un automorphisme (endomorphisme bijectif) de E. $\boxed{\textbf{Conclusion. } s_F \in \mathrm{GL}(E)}$.

7/ Soit $\overrightarrow{v} \in E$. Par hypothèse : $\exists! \left(\overrightarrow{f}, \overrightarrow{g}\right) \in F \times G, \quad \overrightarrow{v} = \overrightarrow{f} + \overrightarrow{g}$.

Or, par définition : $\overrightarrow{f} = p_F(\overrightarrow{v})$, $\overrightarrow{g} = p_G(\overrightarrow{v})$ et $s_F(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{f} - \overrightarrow{g}$.

On a donc : $\forall \overrightarrow{v} \in E,\ s_F(\overrightarrow{v}) = p_F(\overrightarrow{v}) - p_G(\overrightarrow{v})$.

$\boxed{\textbf{Conclusion. } s_F = p_F - p_G}$.

8/ Par définition des projections p_F et p_G, on a : $p_F + p_G = \mathrm{id}_E$. Ainsi : $s_F - \mathrm{id}_E = -2p_G$.
Par suite : $\ker(s_F - \mathrm{id}_E) = \ker(-2p_G) = \ker(p_G) = F$.

De manière analogue : $s_F + \mathrm{id}_E = 2p_F$. Par suite : $\ker(s_F + \mathrm{id}_E) = \ker(2p_F) = \ker(p_F) = G$.

$\boxed{\textbf{Conclusion. } \ker(s_F - \mathrm{id}_E) = F \text{ et } \ker(s_F + \mathrm{id}_E) = G}$.

Partie III — Réflexions dans un espace vectoriel

Dans cette partie, E désigne un $\mathbb{K}$-ev. Un endomorphisme f de E est appelé une **réflexion** si $f^2 = \mathrm{id}_E$; en d'autres termes, une réflexion de E est une involution linéaire de E.

9/ Supposons que s soit une réflexion ; on a donc $s \in \mathscr{L}(E)$ et $s^2 = \mathrm{id}_E$. Soit $\overrightarrow{v}$ un vecteur de E. Procédons par analyse-synthèse pour établir que $\ker(s - \mathrm{id}_E)$ et $\ker(s + \mathrm{id}_E)$ sont supplémentaires dans E.

➤ Analyse : supposons qu'il existe $\overrightarrow{f} \in \ker(s - \mathrm{id}_E)$ et $\overrightarrow{g} \in \ker(s + \mathrm{id}_E)$ tels que $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{f} + \overrightarrow{g}$. Alors : $s(\overrightarrow{v}) = s\left(\overrightarrow{f}\right) + s(\overrightarrow{g})$ d'où $s(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{f} - \overrightarrow{g}$. On a donc :

$$\begin{cases} \overrightarrow{v} = \overrightarrow{f} + \overrightarrow{g} \\ \\ s(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{f} - \overrightarrow{g} \end{cases} \quad \text{d'où :} \begin{cases} \overrightarrow{f} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{v} + s(\overrightarrow{v})) \\ \\ \overrightarrow{g} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{v} - s(\overrightarrow{v})) \end{cases}$$

➤ Synthèse : on écrit donc $\overrightarrow{v} = \underbrace{\frac{1}{2}(\overrightarrow{v} + s(\overrightarrow{v}))}_{=\overrightarrow{v_1}} + \underbrace{\frac{1}{2}(\overrightarrow{v} - s(\overrightarrow{v}))}_{=\overrightarrow{v_2}}$.

$$\text{On a : } s(\overrightarrow{v_1}) = s\left(\frac{1}{2}(\overrightarrow{v} + s(\overrightarrow{v}))\right) = \frac{1}{2}\left(s(\overrightarrow{v}) + \underbrace{s^2(\overrightarrow{v})}_{=s(\overrightarrow{v})}\right) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{v} + s(\overrightarrow{v})) = \overrightarrow{v_1}.$$

D'où : $\boxed{\overrightarrow{v_1} \in \ker(s - \mathrm{id}_E) \quad (\spadesuit)}$

$$\text{Et : } s(\overrightarrow{v_2}) = s\left(\frac{1}{2}(\overrightarrow{v} - s(\overrightarrow{v}))\right) = \frac{1}{2}\left(s(\overrightarrow{v}) - \underbrace{s^2(\overrightarrow{v})}_{=s(\overrightarrow{v})}\right) = -\frac{1}{2}(\overrightarrow{v} - s(\overrightarrow{v})) = -\overrightarrow{v_2}.$$

D'où : $\boxed{\overrightarrow{v_2} \in \ker(s + \mathrm{id}_E) \quad (\clubsuit)}$

On déduit alors de $(\spadesuit)$ et de $(\clubsuit)$ que : $\boxed{E = \ker(s - \mathrm{id}_E) + \ker(s + \mathrm{id}_E) \quad (\heartsuit)}$.

Enfin, soit $\overrightarrow{v} \in \ker(s - \mathrm{id}_E) \cap \ker(s + \mathrm{id}_E)$. Alors : $s(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{v}$ et $s(\overrightarrow{v}) = -\overrightarrow{v}$ d'où $\overrightarrow{v} = -\overrightarrow{v}$ et par suite : $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$. Donc : $\boxed{\ker(s - \mathrm{id}_E) \cap \ker(s + \mathrm{id}_E) = \left\{\overrightarrow{0}\right\} \ (\diamondsuit)}$.

On déduit alors de $(\heartsuit)$, $(\diamondsuit)$ et de la caractérisation des sous-espaces vectoriels supplémentaires que :

$$E = \ker(s - \mathrm{id}_E) \bigoplus \ker(s + \mathrm{id}_E).$$

Conclusion. Soit $s \in \mathscr{L}(E)$. Alors : $[s^2 = \mathrm{id}_E] \Longrightarrow [E = \ker(s - \mathrm{id}_E) \bigoplus \ker(s + \mathrm{id}_E)]$.

10/ Réciproquement, soit s un endomorphisme de E tel que : $E = \ker(s - \mathrm{id}_E) \bigoplus \ker(s + \mathrm{id}_E)$. Soit $\overrightarrow{v} \in E$. Par hypothèse il existe alors $\overrightarrow{f} \in \ker(s - \mathrm{id}_E)$ et $\overrightarrow{g} \in \ker(s + \mathrm{id}_E)$ uniques tels que : $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{f} + \overrightarrow{g}$.

On a alors : $s(\overrightarrow{v}) = s\left(\overrightarrow{f} + \overrightarrow{g}\right) = s\left(\overrightarrow{f}\right) + s(\overrightarrow{g}) = \overrightarrow{f} - \overrightarrow{g}$.

Puis : $s^2(\overrightarrow{v}) = s\left(\overrightarrow{f} - \overrightarrow{g}\right) = s\left(\overrightarrow{f}\right) - s(\overrightarrow{g}) = \overrightarrow{f} + \overrightarrow{g} = \overrightarrow{v}$.

En résumé : $\forall \overrightarrow{v} \in E,\ s^2(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{v}$. D'où $s^2 = \mathrm{id}_E$; s est donc une réflexion.

Conclusion. Soit $s \in \mathscr{L}(E)$. Alors : $[E = \ker(s - \mathrm{id}_E) \bigoplus \ker(s + \mathrm{id}_E)] \Longrightarrow [s^2 = \mathrm{id}_E]$.

Partie IV — Synthèse : toute réflexion est une symétrie

11/ Supposons que s est une réflexion. D'après la question 9 : $E = \ker(s - \mathrm{id}_E) \bigoplus \ker(s + \mathrm{id}_E)$.
Soit $\overrightarrow{v} \in E$. Il existe alors $\overrightarrow{f} \in \ker(s - \mathrm{id}_E)$ et $\overrightarrow{g} \in \ker(s + \mathrm{id}_E)$ uniques tels que : $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{f} + \overrightarrow{g}$.
D'où : $s(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{f} - \overrightarrow{g}$.
Par ailleurs, en notant σ la symétrie par rapport à $F = \ker(s - \mathrm{id}_E)$ parallèlement à $G = \ker(s + \mathrm{id}_E)$ (qui est bien définie puisque $E = F \bigoplus G$), on a : $\sigma(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{f} - \overrightarrow{g}$.
D'où : $\forall \overrightarrow{v} \in E,\ s(\overrightarrow{v}) = \sigma(\overrightarrow{v})$. Donc : $s = \sigma$.

Conclusion. Soit $s \in \mathscr{L}(E)$. Si s est une réflexion, alors s est la symétrie par rapport à $\ker(s - \mathrm{id}_E)$ parallèlement à $\ker(s + \mathrm{id}_E)$.

Partie V — Application

On définit une application $u : \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ en posant : $u\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix}$. On admet que u est un endomorphisme de E.

12/ Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$. On a :

$$[M \in \ker(u - \mathrm{id}_E)] \Longleftrightarrow [u(M) = M] \Longleftrightarrow \left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix}\right] \Longleftrightarrow [b = a \wedge d = c].$$

Ainsi : $[M \in \ker(u - \mathrm{id}_E)] \Longleftrightarrow \left[\exists (a, c) \in \mathbb{R}^2,\ M = \begin{pmatrix} a & a \\ c & c \end{pmatrix}\right]$

$$\Longleftrightarrow \left[\exists (a, c) \in \mathbb{R}^2,\ M = a\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right] \Longleftrightarrow [\exists (a, c) \in \mathbb{R}^2,\ M = a(E_{11} + E_{12}) + c(E_{21} + E_{22})]$$

Conclusion. $\ker(u - \mathrm{id}_E) = \mathrm{Vect}(E_{11} + E_{12}, E_{21} + E_{22})$.

13/ Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$. On a :

$$[M \in \ker(u + \mathrm{id}_E)] \Longleftrightarrow [u(M) = -M] \Longleftrightarrow \left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b & -a \\ -d & -c \end{pmatrix}\right] \Longleftrightarrow [b = -a \wedge d = -c].$$

Ainsi : $[M \in \ker(u + \mathrm{id}_E)] \Longleftrightarrow \left[\exists (a,c) \in \mathbb{R}^2,\ M = \begin{pmatrix} a & -a \\ c & -c \end{pmatrix}\right]$

$$\Longleftrightarrow \left[\exists (a,c) \in \mathbb{R}^2,\ M = a\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right] \Longleftrightarrow \left[\exists (a,c) \in \mathbb{R}^2,\ M = a(E_{11} - E_{12}) + c(E_{21} - E_{22})\right]$$

Conclusion. $\ker(u + \mathrm{id}_E) = \mathrm{Vect}(E_{11} - E_{12}, E_{21} - E_{22})$.

14/ u est clairement une réflexion de $E = \mathrm{M}_2(\mathbb{K})$. D'après la question 11 : $\boxed{E = \ker(s - \mathrm{id}_E) \bigoplus \ker(s + \mathrm{id}_E)}$.

PROBLÈME 2 — **(ETUDE D'UN ENDOMORPHISME DE $\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$).**

Dans tout l'exercice, on identifie $\mathbb{R}[X]$ à l'ensemble des fonctions polynomiales. On note $\mathbf{E}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles, c'est à dire que $\mathbf{E} = \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Pour tout f de $\mathbf{E}$, on note $U(f)$ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad [U(f)](x) = \displaystyle\int_{x-1}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$

Partie I — Généralités sur l'application U

1/ Soit $f \in \mathbf{E}$, T-périodique. Montrer que : $\forall a \in \mathbb{R},\ \displaystyle\int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t$: question de cours !

Dans le détail : soit $f \in \mathbf{E}$, T-périodique, et soit a un réel quelconque. Il existe un unique entier relatif n tel que $nT \leqslant a < (n+1)T$. D'après la relation de Chasles pour les intégrales, on a :

$$\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \underbrace{\int_a^{(n+1)T} f(x)\,\mathrm{d}x}_{=I_1} + \underbrace{\int_{(n+1)T}^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x}_{=I_2} \qquad (\spadesuit)$$

Dans l'intégrale I_1, on effectue le changement de variable $u = x - nT$:

$$I_1 = \int_a^{(n+1)T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a-nT}^{T} \underbrace{f(u+nT)}_{=f(u)}\,\mathrm{d}u = \int_{a-nT}^{T} f(u)\,\mathrm{d}u \qquad (\heartsuit)$$

Dans l'intégrale I_2, on effectue le changement de variable $u = x - (n+1)T$:

$$I_2 = \int_{(n+1)T}^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{a-nT} \underbrace{f(u+(n+1)T)}_{=f(u)}\,\mathrm{d}u = \int_0^{a-nT} f(u)\,\mathrm{d}u \qquad (\clubsuit)$$

On déduit de $(\spadesuit)$, $(\heartsuit)$ et $(\clubsuit)$ que : $\displaystyle\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a-nT}^{T} f(u)\,\mathrm{d}u + \int_0^{a-nT} f(u)\,\mathrm{d}u$

Une nouvelle application de la relation de Chasles permet de conclure : $\displaystyle\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x$

Puisque le réel a est arbitraire dans le raisonnement précédent, on a établi que :

$\boxed{\text{Si } f \in \mathbf{E} \text{ est } T\text{-périodique, alors : } \forall a \in \mathbb{R},\ \displaystyle\int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t}$.

2/ a/ Supposons que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et T-périodique. D'après la formule donnant la dérivée d'une fonction composée, on a : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x+T) = f'(x)$. Il s'ensuit que f' est T-périodique.

Conclusion. Pour f dérivable sur $\mathbb{R}$, on a : f T-périodique $\Longrightarrow f'$ T-périodique.

b/ La fonction $f = \sin + \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée est $\cos + \mathbb{1}_{\mathbb{R}}$, qui est 2π-périodique (alors que f ne l'est pas, par exemple car elle est non bornée). La réciproque de l'implication du a/ est donc fausse.

3/ Soit $f \in \mathbf{E}$. Pour tout réel x, on a : $U(f)(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{x-1} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Il s'ensuit que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. ‡

De plus : $\forall x \in \mathbb{R},\ U(f)'(x) = f(x) - f(x-1)$.

Conclusion. $\forall f \in \mathbf{E},\ U(f) \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et : $\forall x \in \mathbb{R},\ U(f)'(x) = f(x) - f(x-1)$.

4/ Soient f et g dans $\mathbf{E}$, λ et μ deux réels. Pour tout réel x, on a :

$$U(\lambda f + \mu g)(x) = \int_0^x \lambda f(t) + \mu g(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{x-1} \lambda f(t) + \mu g(t)\,\mathrm{d}t$$

Par linéarité de l'intégrale, on en déduit que :

$$U(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda\left[\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{x-1} f(t)\,\mathrm{d}t\right] + \mu\lambda\left[\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{x-1} f(t)\,\mathrm{d}t\right]$$

Autrement écrit : $U(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda U(f)(x) + \mu U(g)(x)$. Cette relation étant valable pour un réel x arbitraire, on en déduit que : $U(\lambda f + \mu g) = \lambda U(f) + \mu U(g)$. Ce qui établit la linéarité de U.

Conclusion. $U \in \mathscr{L}(\mathbf{E})$.

Partie II — Restriction de U à $\mathbb{R}_n[X]$

Dans cette partie, n désigne un entier naturel non nul. On note $\mathbf{E_n} = \mathbb{R}_n[X]$.

5/ En identifiant un polynôme et la fonction polynomiale qui lui est associée, on a :

$$U(X^j) = \frac{1}{j+1}\left[X^{j+1} - (X-1)^{j+1}\right]$$

Or : $(X-1)^{j+1} = \displaystyle\sum_{i=0}^{j+1} \binom{j+1}{i}(-1)^{j-i+1}X^i = X^{j+1} - \sum_{i=0}^{j} \binom{j+1}{i}(-1)^{j-i}X^i$.

Il s'ensuit que : $U(X^j) = \displaystyle\sum_{i=0}^{j} \binom{j+1}{i}(-1)^{j-i}X^i$. Il est clair que : $\deg(U(X^j)) = j$

Conclusion. $\forall j \in [\![0, n]\!],\quad \deg(U(X^j)) = j$.

6/ La restriction $U_{|\mathbf{E_n}}$ de U à $\mathbf{E_n}$ est linéaire d'après la question 4, et est à valeurs dans $\mathbf{E_n}$ d'après la question précédente. Ainsi, U induit un endomorphisme de $\mathbf{E_n}$.

Conclusion. $U_{|\mathbf{E_n}} \in \mathscr{L}(\mathbf{E_n})$.

‡. La fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ est la primitive de f qui s'annule en 0, qui est évidemment de classe $\mathscr{C}^1$. La seconde intégrale est la composée de cette primitive avec une fonction affine ; d'après les théorèmes généraux, la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_0^{x-1} f(t)\,dt$ est également de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

7/ a/ D'après la question 5, la famille $\{U_n(1), U_n(X), \ldots, U_n(X^n)\}$ est une famille échelonnée de polynômes non nuls ; à ce titre, elle est libre. §

Conclusion. La famille $\mathscr{F} = \{U_n(1), U_n(X), \ldots, U_n(X^n)\}$ est une famille libre de $\mathbb{R}_n[X]$.

b/ Soit $P \in \ker U_n$. Le polynôme P appartenant à $\mathbf{E_n}$: $\exists!\ (a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1},\ P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.

Ces observations faites, on a : $U_n(P) = 0$ (puisque $P \in \ker U_n$).

Par ailleurs : $U_n(P) = U_n\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k\right) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k U_n\left(X^k\right)$ (par linéarité de U_n).

La famille $\{U_n(1), U_n(X), \ldots, U_n(X^n)\}$ étant libre (question précédente), on en déduit que les a_k sont tous nuls. Par conséquent : $P = 0$.

On en déduit que $\ker(U_n) = \{0\}$. L'endomorphisme f est donc injectif.

D'autre part, la famille $\mathscr{B} = \{1, X, \ldots, X^n\}$ est génératrice de $\mathbf{E_n}$. ¶

Donc : $\mathrm{im}(f) = \mathrm{Vect}\,\{U_n(1), U_n(X), \ldots, U_n(X^n)\}$. Or on a vu que la famille $\{U_n(1), U_n(X), \ldots, U_n(X^n)\}$ est libre ; puisqu'elle est de cardinal $(n+1)$ (égal à la dimension de $\mathbf{E_n}$), c'est une base de $\mathbf{E_n}$.

D'où : $\mathrm{im}(f) = \mathbf{E_n}$. On en déduit que l'endomorphisme f est surjectif.

Conclusion. L'endomorphisme f est injectif et surjectif. C'est donc un automorphisme de E.

Partie III — Noyau de U

8/ Soit $f \in \mathbf{E}$. Supposons que f appartient à $\ker U$. Alors : $U(f) = 0$. D'où : $\forall x \in \mathbb{R},\ \displaystyle\int_{x-1}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

Cette relation est valide pour tout réel x, donc en particulier pour $x = 1$. Ainsi : $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

De plus, $U(f)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x on a : $U(f)'(x) = f(x) - f(x-1)$ (question 3). Puisque la fonction $U(f)$ est la fonction nulle (par hypothèse), on a donc : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) - f(x-1) = 0$.

En résumé : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(x-1)$. Il s'ensuit que f est 1-périodique.

Conclusion. Si f appartient à $\ker(U)$, alors : $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ et f est 1-périodique.

9/ Réciproquement, si une fonction est telle que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ et f est 1-périodique, alors : $\forall x \in \mathbb{R},\ \displaystyle\int_{x-1}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ d'après la question 1. Ainsi $U(f) = 0$, donc $f \in \ker(U)$.

Conclusion. $\ker(U) = \left\{ f \in \mathbf{E} \,/\, f \text{ périodique de période 1 et telle que } \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}$.

§. Exercice classique.

¶. C'est même une base de $\mathbf{E_n}$, la base canonique.

10/ On déduit de la question précédente que $\ker(U)$ n'est pas réduit à la fonction nulle ; le noyau contient par exemple la fonction $x \in \mathbb{R} \longmapsto \sin(2\pi x)$. Par suite, l'endomorphisme U n'est pas injectif.

Conclusion. Puisque $\ker(U) \neq \{0\}$, U n'est pas injectif.

D'après la question 3, l'endomorphisme U est à valeurs dans $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. En d'autres termes, pour toute $f \in \mathbf{E}$, la fonction $U(f)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Il s'ensuit que la fonction valeur absolue, qui appartient à $\mathbf{E}$ mais qui n'est pas de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, n'appartient pas à l'image de U. Par suite, l'endomorphisme U n'est pas surjectif.

Conclusion. L'endomorphisme U n'est pas surjectif.