Devoir surveillé de Mathématiques n^{0}10 — 10 avril 2023

Durée : 4 heures — Tout matériel électronique interdit

Tous les résultats doivent être encadrés ou soulignés

L'exercice 1 et le problème 1 sont communs ; puis vous traiterez au choix l'un des deux exercices "BLANC" ou "ORANGE"

Exercice 1 — (Fractions rationnelles)

On pose :

$$F = \frac{2X^2 + X + 1}{(X^2+1)(X^2+X)}\,; \qquad P = 2X^2 + X + 1 \text{ et } Q = (X^2+1)(X^2+X)$$

1/ Déterminer les décompositions en irréductibles du polynôme Q dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.

2/ Effectuer la décomposition en éléments simples de F dans $\mathbb{C}(X)$.

3/ En déduire la décomposition en éléments simples de F dans $\mathbb{R}(X)$.

4/ Dans cette question, A désigne un réel $\geqslant 1$. On pose :

$$I(A) = \int_1^A \frac{2t^2 + t + 1}{(t^2+1)(t^2+t)}\,\mathrm{d}t$$

a/ Calculer $I(A)$ en fonction de A.

b/ Etablir que $I(A)$ admet une limite finie lorsque A tend vers $+\infty$, et calculer cette limite.

Problème 1 — (Analyse)

Partie I

1/ Rappeler l'expression donnant le développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction $f_1 : x \longmapsto (1+x)^\alpha$ (avec α réel non nul arbitraire).

2/ Déduire de la question précédente le développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction

$$f_2 : x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

3/ Déduire de la question précédente le développement limité à l'ordre 5 en 0 de la fonction arcsin.

Partie II — Résolution d'une ED

4/ On veut résoudre dans cette question l'équation différentielle

$$(\mathrm{E1}) : \qquad \cos(t)\, y''(t) - 2\sin(t)\, y'(t) - \cos(t)\, y(t) = 0$$

sur l'intervalle $I = \left] -\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2} \right[$.

Plus précisément, on cherche à déterminer les fonctions $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ sur I solutions de (E1), en utilisant une méthode appelée “changement de fonction inconnue”.

a/ Soit $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur I. On pose pour tout réel $t \in I$: $z(t) = y(t)\cos(t)$.

Montrer que y est solution de (E1) si et seulement si $z'' = 0$.

b/ Déduire de la question précédente la solution générale de (E1) sur I.

5/ On veut résoudre dans cette question l'équation différentielle

$$(\mathrm{E2}) : \qquad (1-x^2)\, y''(x) - 3x\, y'(x) - y(x) = 0$$

sur l'intervalle $J =]-1, 1[$.

Plus précisément, on cherche à déterminer les fonctions $y : J \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ sur J solutions de (E2), en effectuant le changement de variable $x = \sin(t)$.

a/ Pour tout réel $t \in I$, on pose : $z(t) = y(\sin(t))$. Il revient au même d'écrire que : $\forall\, x \in J,\ y(x) = z(\arcsin(x))$.

Montrer que y est solution de (E2) si et seulement si z est solution de (E1).

b/ Déduire de la question précédente la solution générale de (E2) sur J.

Partie III — Une alternative pour résoudre (E2)

On considère la même équation différentielle (E2) : $(1-x^2)\,y''(x) - 3x\,y'(x) - y(x) = 0$ que dans la partie II.

Dans cette partie, on ne cherche pas à résoudre cette équation, mais à déterminer le développement limité en 0 d'une solution de (E2).

Tout au long de cette partie, f désigne une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ solution de (E2).

6/ Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $J =]-1, 1[$.

7/ Etablir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in J, \quad \left(1-x^2\right) f^{(n+2)}(x) - (2n+3)\,x f^{(n+1)}(x) - (n+1)^2 f^{(n)}(x) = 0$$

8/ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = f^{(n)}(0)$. Etablir une relation entre a_{n+2} et a_n.

9/ Soit p un entier naturel quelconque. Exprimer a_{2p+1} et a_{2p} en fonction de a_1 et a_0 respectivement et à l'aide de factorielles.

Partie IV — Conclusion

On pourra utiliser dans cette partie les résultats des parties II et III.

Soit n un entier naturel.

10/ Ecrire le DL à l'ordre $2n+1$ en 0 de la fonction $g : x \longmapsto \dfrac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$.

Indication : on pourra observer que g est la solution de (E2) telle que $g(0) = 0$ et $g'(0) = 1$.

11/ Ecrire le DL à l'ordre $2n$ en 0 de la fonction $h : x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

12/ Ecrire le DL à l'ordre $2n+1$ en 0 de la fonction arcsin.

13/ **Application**. Etablir que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1}\binom{2k}{k}\binom{2(n-k)}{n-k} = \frac{16^n}{(n+1)\dbinom{2n+1}{n}}$

Indication : on pourra s'intéresser au coefficient de x^{2n+1} dans le DL à l'ordre $2n+1$ en 0 de g.

Problème BLANC — $\boxed{\text{Polynômes}}$

On définit une suite de polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant :

$$T_0 = 1,\, T_1 = X, \text{ et } \forall\, n \in \mathbb{N},\ T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$$

Ces polynômes sont appelés *polynômes de Tchebychev de première espèce.*

1/ Expliciter T_2 et T_3.

2/ Etablir que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \deg(T_n) = n \text{ et } \mathrm{cd}(T_n) = 2^{n-1}$$

3/ Etablir que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, \theta \in \mathbb{R},\ T_n\left(\cos(\theta)\right) = \cos(n\theta)$.

Dans la suite, on pourra admettre que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, \theta \in \mathbb{R},\ T_n\left(\mathrm{ch}(\theta)\right) = \mathrm{ch}(n\theta)$.

4/ Soit n un entier naturel. A l'aide de la question précédente, établir que :

$$T_n(1) = 1 \qquad \text{et} \qquad T'_n(1) = n^2$$

5/ Soit à présent n un entier naturel non nul. Déterminer les racines de T_n.

On justifiera en particulier que toutes les racines de T_n sont dans l'intervalle $[-1, 1]$, et qu'elles sont toutes simples.

6/ Etudier la parité * du polynôme T_n en fonction de la parité de l'entier naturel n.

7/ Soit n un entier naturel non nul, et x un nombre réel. Montrer que : $|x| \leqslant 1 \iff |T_n(x)| \leqslant 1$.

8/ Etablir que l'équation $|T_n(x)| = 1$ possède exactement $(n+1)$ solutions dans $\mathbb{R}$,

que l'on notera $a_0, \ldots, a_n$ (avec $a_0 > a_1 > \cdots > a_n$).

9/ Pour tout k dans $[\![\, 0, n \,]\!]$, calculer $T_n(a_k)$.

---

*. Par parité du polynôme, on entend parité de la fonction polynomiale associée.

PROBLÈME ORANGE — POLYNÔMES

Notations.

➤ Dans ce problème, on note $\mathscr{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$ l'anneau des fonctions continues sur $[-1,1]$ et à valeurs réelles.

➤ On note $\mathbb{R}[X]$ l'anneau des polynômes à coefficients réels en l'indéterminée X, et pour tout entier naturel n, on note $\mathbb{R}_n[X]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ constitué des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

➤ On pourra identifier polynôme et fonction polynomiale associée.

PARTIE A - Etude d'une famille de polynômes

1/ Pour tout entier naturel n, on pose $U_n = (X^2-1)^n$, et $P_n = \dfrac{n!}{(2n)!}U_n^{(n)}$.

a/ Calculer P_0, P_1 et P_2.

b/ Déterminer le degré et le coefficient dominant de P_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2/ Dans cette question, n désigne un entier naturel quelconque.

a/ En utilisant la formule de Leibniz, montrer que :

$$P_n = \frac{1}{\dbinom{2n}{n}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 (X-1)^{n-k}(X+1)^k$$

b/ En déduire les valeurs de $P_n(1)$ et de $P_n(-1)$.

3/ Dans cette question, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

a/ Déterminer les racines de U_n ainsi que leur multiplicité.

b/ En utilisant le théorème de Rolle, montrer que P_n possède au moins n racines dans l'intervalle $]-1,1[$.

c/ Le polynôme P_n peut-il avoir d'autres racines que celles évoquées dans la question précédente ? Quelle est la multiplicité des racines de P_n ?

4/ Dans cette question, n désigne un entier naturel quelconque.

a/ Soit P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$. Etablir par récurrence sur n que :

$$\int_{-1}^{1} P^{(n+1)}(t)Q(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left[P^{(n-k)}(t)Q^{(k)}(t)\right]_{-1}^{1} + (-1)^{n+1}\int_{-1}^{1} P(t)Q^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

b/ En déduire que pour tout polynôme $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ on a :

$$\int_{-1}^{1} P_{n+1}(t)Q(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

Partie B - Polynômes interpolateurs de Lagrange, version générale

Soit n un entier naturel non nul, et $\alpha_0,\ldots,\alpha_n$ $(n+1)$ réels deux à deux distincts du segment $[-1,1]$.

On pose pour tout $k \in [\![0,n]\!]$: $\quad L_k = \displaystyle\prod_{j=0,\, j\neq k}^{n} \frac{X-\alpha_j}{\alpha_k-\alpha_j}$.

5/ Soit k un entier naturel arbitraire. Quel est le degré de L_k ?

6/ Etablir que pour tout $\forall\, k \in [\![0,n]\!]$, $\forall\, i \in [\![0,n]\!]$, $L_k(\alpha_i) = \delta_{ik}$.

7/ Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ un polynôme de degré au plus n. Etablir que : $\quad P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(\alpha_k) L_k$

8/ Etablir que l'application

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}_n[X] &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ P &\longmapsto (P(\alpha_0), P(\alpha_1), \ldots, P(\alpha_n)) \end{aligned}$$

est bijective.

Partie C - Application au calcul intégral

Dans cette partie, on note $\alpha_0,\ldots,\alpha_n$ les racines du polynôme P_{n+1}, qui sont donc $(n+1)$ réels deux à deux distincts du segment $[-1,1]$.

9/ Soit $f \in \mathscr{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$. Justifier qu'il existe un unique polynôme $P_f \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que :

$$\forall\, i \in [\![0,n]\!],\ P_f(\alpha_i) = f(\alpha_i)$$

10/ Montrer qu'il existe $n+1$ scalaires $\lambda_0,\ldots,\lambda_n$, que l'on précisera, tels que : $P_f = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \lambda_j L_j$.

➤ Dorénavant, pour toute fonction $f \in \mathscr{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$, on notera :

$$I(f) = \int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad J(f) = \int_{-1}^{1} P_f(t)\,\mathrm{d}t$$

11/ Montrer que $J(f)$ peut s'écrire : $J(f) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \mu_i\, f(\alpha_i)$, où les réels μ_i seront exprimés à l'aide des polynômes L_i et des réels α_i.

12/ Montrer que si f est polynomiale de degré inférieur ou égal à n, alors $I_f = J_f$.

13/ On suppose dans cette question que f est polynomiale de degré inférieur ou égal à $2n+1$. En réalisant la division euclidienne de f par P_{n+1}, établir que $J(f) = I(f)$.

Ici s'arrête le problème, provisoirement... Dans quelques semaines, nous pourrons aller un peu plus loin et établir que la méthode décrite ci-dessus fournit un moyen assez efficace pratiquement pour déterminer une valeur approchée de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment (et pas seulement d'une fonction polynomiale de degré pas trop grand).