PBS 10 - Corrigé en ligne le 16 avril

Exercice 1 — Dans $E = \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, on considère l'ensemble L des fonctions lipschitziennes sur $[0,1]$.

1/ On définit 2 fonctions f et g sur $[0,1]$ en posant :

$$\forall x \in [0,1], \quad f(x) = \arctan(x) \text{ et } g(x) = \sqrt{x}$$

Montrer que $f \in L$, et que $g \notin L$.

2/ Montrer que $L \subset E$.

3/ Montrer que L est un sev de E.

4/ On note L_1 l'ensemble des fonctions 1-lipschitziennes sur $[0,1]$. Montrer que L_1 n'est pas un sev de E.

Exercice 2 — Soit E un $\mathbb{K}$-ev, et $f \in \mathscr{L}(E)$.
Pour tout entier naturel n, on pose :

$$K_n = \ker(f^n) \qquad \text{et} \qquad I_n = \mathrm{im}(f^n)$$

1/ Montrer que la suite $(K_n)_n$ est croissante, et que la suite $(I_n)_n$ est décroissante.

2/ On suppose qu'il existe un entier p tel que $K_{p+1} = K_p$. Montrer que pour tout $q \in \mathbb{N}$, $K_{p+q} = K_p$.

3/ On suppose à présent que E est de dimension finie. Etablir que la suite $(K_n)_n$ est stationnaire.

Exercice 3 — Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ sont $(n+1)$ réels 2 à 2 distincts tels que : $\alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_n$. On pose : $\quad U = \prod_{i=0}^{n} (X - \alpha_i) \quad$ c'est-à-dire * :

$$U = (X - \alpha_0)(X - \alpha_1) \cdots (X - \alpha_n)$$

Pour tout entier naturel p non-nul, on définit l'application :

$$\begin{aligned} \varphi_p : \mathbb{R}_p[X] &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ P &\longmapsto (P(\alpha_0), P(\alpha_1), \ldots, P(\alpha_n)) \end{aligned}$$

1/ Montrer que l'application φ_p est linéaire.

2/ Montrer que si $p \leqslant n$, alors l'application φ_p est injective.

3/ Montrer que si $p \geqslant n+1$, alors $\ker \varphi_p$ est un sev de $\mathbb{R}_p[X]$ dont on précisera une base et la dimension.

4/ Montrer que si $p = n$, alors l'application φ_p est un isomorphisme.

*. Plus explicitement mais moins rigoureusement.