

PBS 10 - CORRIGÉ EN LIGNE LE 16 AVRIL

EXERCICE 1 — Dans $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$, on considère l'ensemble L des fonctions lipschitziennes sur $[0, 1]$.

1/ On définit 2 fonctions f et g sur $[0, 1]$ en posant :

$$\forall x \in [0, 1], \quad f(x) = \arctan(x) \text{ et } g(x) = \sqrt{x}$$

Montrer que $f \in L$, et que $g \notin L$.

2/ Montrer que $L \subset E$.

3/ Montrer que L est un sev de E .

4/ On note L_1 l'ensemble des fonctions 1-lipschitziennes sur $[0, 1]$. Montrer que L_1 n'est pas un sev de E .

EXERCICE 2 — Soit E un $\mathbb{K}$ -ev, et $f \in \mathcal{L}(E)$.

Pour tout entier naturel n , on pose :

$$K_n = \ker(f^n) \quad \text{et} \quad I_n = \text{im}(f^n)$$

1/ Montrer que la suite $(K_n)_n$ est croissante, et que la suite $(I_n)_n$ est décroissante.

2/ On suppose qu'il existe un entier p tel que $K_{p+1} = K_p$. Montrer que pour tout $q \in \mathbb{N}$, $K_{p+q} = K_p$.

3/ On suppose à présent que E est de dimension finie. Etablir que la suite $(K_n)_n$ est stationnaire.

4/ Donner un exemple d'endomorphisme f pour lequel la suite $(K_n)_n$ est strictement croissante.

EXERCICE 3 — Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ sont $(n+1)$ réels 2 à 2 distincts tels que :

$$\alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_n. \text{ On pose : } U = \prod_{i=0}^n (X - \alpha_i) \quad \text{c'est-à-dire}^* :$$

$$U = (X - \alpha_0)(X - \alpha_1) \cdots (X - \alpha_n)$$

Pour tout entier naturel p non-nul, on définit l'application :

$$\begin{aligned} \varphi_p : \mathbb{R}_p[X] &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ P &\longmapsto (P(\alpha_0), P(\alpha_1), \dots, P(\alpha_n)) \end{aligned}$$

1/ Montrer que l'application φ_p est linéaire.

2/ Montrer que si $p \leq n$, alors l'application φ_p est injective.

3/ Montrer que si $p \geq n+1$, alors $\ker \varphi_p$ est un sev de $\mathbb{R}_p[X]$ dont on précisera une base et la dimension.

4/ Montrer que si $p = n$, alors l'application φ_p est un isomorphisme.

EXERCICE 4 — Soient E un $\mathbb{K}$ -ev et p un projecteur de E . Montrer que : $\ker(\text{id}_E - p) = \text{imp}$

*. Plus explicitement mais moins rigoureusement.