Chapitre 20 : Espaces vectoriels et applications linéaires
 + **Chapitre 22 : Espaces vectoriels de dimension finie**
 (COURS + EXERCICES)

Chapitre 20 : Espaces vectoriels et applications linéaires

- 1 – Espaces vectoriels
- 2 – Sous-espaces vectoriels
- 3 – Combinaisons linéaires, familles génératrices
- 4 – Applications linéaires
- 5 – Noyau et image d’une application linéaire
- 6 – Isomorphismes et automorphismes
- 7 – Sommes de sev et sev supplémentaires
- 8 – Projecteurs

Chapitre 22 : Espaces vectoriels de dimension finie

Dans ce chapitre, E désigne un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Dorénavant, on pourra noter v au lieu de v un élément de E .

1 – Familles libres et bases d’un espace vectoriel

Définition : n vecteurs $v_1, \dots, v_n$ d’un $\mathbb{K}$ -ev E sont **linéairement indépendants** si :

$$\left[\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = 0_E \right] \implies [\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \lambda_i = 0] \quad (\text{avec } (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n)$$

Remarque : la définition fournit une méthode pour prouver que n vecteurs $v_1, \dots, v_n$ d’un $\mathbb{K}$ -ev E sont linéairement indépendants. Explicitement, on suppose qu’il existe n scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0_E$, et on établit que cette égalité n’est satisfaite que lorsque tous les λ_i sont nuls.

Définitions : famille libre, famille liée.

Propriété : soient $v_1, \dots, v_n$ n vecteurs d’un $\mathbb{K}$ -ev E . La famille $\mathcal{F} = (v_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ est **liée** SSI il existe un entier $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que : $v_i \in \text{Vect}(v_1, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_n)$.

Définition : **base** d’un espace vectoriel, bases canoniques des ev “de référence”.

2 – Espaces vectoriels de dimension finie

Définition : on appelle **$\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie** un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E ayant une famille génératrice finie.

Exemples : $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^n, \mathbb{K}^n, M_{np}(\mathbb{K}), \mathbb{K}_n[X]$ sont de dim finie ; $\mathbb{K}[X]$ et $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ne le sont pas.

Théorème : dans un espace vectoriel (non nul) de dimension finie, toutes les bases ont le même cardinal.

Définition : la dimension d’un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie est le cardinal d’une quelconque de ses bases.

Notation : $\dim_{\mathbb{K}} E$, ou $\dim E$ si pas d’ambiguïté sur $\mathbb{K}$.

Théorème (“de la base extraite”) : de toute famille génératrice on peut extraire une base.

Corollaire : tout espace vectoriel de dimension finie admet une base.

Corollaire : soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie n .

- 1/ Toute famille génératrice de E possède au moins n éléments.
- 2/ Toute famille génératrice de E de cardinal n est une base.

Théorème (de la base incomplète) : toute famille libre de E est contenue dans une base de E .

Corollaire : soit E un $\mathbb{K}$ -ev non nul de dimension finie n .

- 1/ Toute famille libre de E possède au plus n éléments.
- 2/ Toute famille libre de E de cardinal n est une base.

Corollaire : soit E un $\mathbb{K}$ -ev non nul de dimension finie n , et F un sev de E . Alors :

$$1/ \dim F \leq n \qquad 2/ \dim F = n \text{ SSI } F = E$$

3 – Dimension d’une somme de sev

Propriété : soient E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie, et F et G deux sev supplémentaires dans E (ie $E = F \oplus G$). Alors : $\dim E = \dim F + \dim G$.

Théorème (existence d’un supplémentaire en dimension finie) : soient E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie, et F un sev de E . Il existe un sev G de E tel que : $E = F \oplus G$.

Théorème (des 4 dimensions ou relation de Graßmann) : soient E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie, et F et G deux sev de E . Alors :

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$$

Corollaire : soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie, F et G deux sev de E . Alors $E = F \oplus G$ SSI $\dim E = \dim F + \dim G$ et $F \cap G = \{0_E\}$.

Définition : soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension n . On appelle **hyperplan** de E un sev de E de dimension $n - 1$.

Propriété : soient E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension n , H un hyperplan de E et v un vecteur de E tel que $v \notin H$. Alors : $E = H \oplus \text{Vect}(v)$.

4 – Coordonnées d'un vecteur dans une base, matrice de passage

Théorème : soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension n , et soit $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ une base de E . Alors :

$$\forall V \in E, \exists! (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n, V = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$$

Définition : les scalaires $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ du théorème ci-dessus sont appelés **coordonnées du vecteur V dans la base $\mathcal{B}$** .

Changement de base et matrice de passage

Définition : soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension n ($n \neq 0$), soient $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ et $\mathcal{B}' = (w_1, \dots, w_n)$ deux bases de E . La **matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la**

base $\mathcal{B}'$ notée $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ = $(\alpha_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$ tq : $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, w_j = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} v_i$

Traduction : $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ est la matrice obtenue en mettant en colonnes les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$ (attention à l'ordre!).

Propriété (effet d'un changement de base sur les coordonnées) : soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension n ($n \neq 0$), soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E . Pour tout vecteur V de E , notons $X_{\mathcal{B}}$ et $X_{\mathcal{B}'}$ les n -uplets de ses coordonnées dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ respectivement. On a : $X_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} X_{\mathcal{B}'}$.

Propriété : soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension n ($n \neq 0$), soient $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$ trois bases de E . On a : $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}''} = P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}''}$.

Corollaire : soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension n ($n \neq 0$), soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E . Alors $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$, et $[P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}]^{-1} = P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$.

Pour enfoncer le clou : **toute matrice de passage est inversible.**

5 – Classification des ev de dimension finie

Théorème (classification des ev de dimension finie) : tout $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

Traduction : à isomorphisme près, $\mathbb{K}^n$ est le seul $\mathbb{K}$ -ev de dimension n .

QUESTIONS DE COURS

- **Propriété** : soient $v_1, \dots, v_n$ n vecteurs d'un $\mathbb{K}$ -ev E . La famille $\mathcal{F} = (v_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ est **liée SSI** il existe un entier $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que : $v_i \in \text{Vect}(v_1, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_n)$.
- **Théorème (existence d'un supplémentaire en dimension finie)** : soient E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie, et F un sev de E . Il existe un sev G de E tel que : $E = F \oplus G$.
- **Théorème (des 4 dimensions ou relation de Graßmann)** : soient E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie, et F et G deux sev de E . Alors : $\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$

- **Propriété (caractérisation des supplémentaires en dimension finie)** : soient E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie, F et G deux sev de E . Alors : $E = F \oplus G \iff \begin{cases} \dim E = \dim F + \dim G \\ F \cap G = \{0_E\} \end{cases}$
- **Propriété** : soient E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension n , H un hyperplan de E et v un vecteur de E tel que $v \notin H$. Alors : $E = H \oplus \text{Vect}(v)$.
- **Théorème (classification des ev de dimension finie)** : tout $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.