Exercices 23 — Probabilités — Corrigé

Probabilités "basiques", conditionnelles, formule(s) des probas totales

Exercice 1. — Soient Ω l'univers d'une expérience aléatoire, et p une probabilité sur Ω.

Montrer que p est croissante, càd que si A et B désignent deux évènements, alors :

$$[A \subset B] \Longrightarrow [p(A) \leqslant p(B)]$$

Soient A et B deux évènements, tels que $A \subset B$.

Alors : $B = A \cup (B \backslash A)$. Cette union étant disjointe (càd : $A \cap (B \backslash A) = \emptyset$), on a (par définition de probabilité) :

$$p(B) = p(A) + p\left(B \backslash A\right)$$

Or $p\left(B \backslash A\right) \geqslant 0$ par définition de probabilité encore une fois.

Il s'ensuit que : $p(B) \geqslant p(A)$.

Conclusion. Pour tout couple (A, B) d'évènements : $[A \subset B] \Longrightarrow [p(A) \leqslant p(B)]$.

Exercice 2. — Soient Ω l'univers d'une expérience aléatoire, $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ un évènement, et p une probabilité sur Ω.

Montrer que p_A est une probabilité sur $\mathscr{P}(\Omega)$.[*]

Il s'agit de montrer que p_A satisfait les conditions permettant d'affirmer que c'est une probabilité :

➤ **p_A est à valeurs dans** $[0, 1]$. Pour tout évènement $B \in \mathscr{P}(\Omega)$, on a :

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

Il est clair que $p_A(B) \geqslant 0$ (p étant à valeurs positives).

Par ailleurs, on a : $(A \cap B) \subset A$. D'après l'exercice précédent, on en déduit que :

$$p\left(A \cap B\right) \leqslant p(A) \qquad \text{d'où :} \qquad p_A(B) \leqslant 1$$

On en déduit que : $p_A(B) \in [0, 1]$. Donc l'application p_A est à valeurs dans $[0, 1]$ $\quad (\spadesuit)$.

➤ On a : $p_A(\Omega) = \dfrac{p(A \cap \Omega)}{p(A)} = \dfrac{p(A)}{p(A)} = 1$.

Ainsi : $p_A(\Omega) = 1 \qquad (\heartsuit)$.

➤ Soient B et $C \in \mathscr{P}(\Omega)$ deux évènements disjoints (tque : $B \cap C = \emptyset$).

On peut alors observer que $A \cap B$ et $A \cap C$ sont disjoints. En effet, en utilisant l'associativité et la commutativité de l'intersection on obtient :

$$(A \cap B) \cap (A \cap C) = A \cap (B \cap A) \cap C = A \cap (A \cap B) \cap C = (A \cap A) \cap (B \cap C) = A \cap \underbrace{(B \cap C)}_{=\emptyset} = \emptyset$$

[*]. J'ai oublié dans l'énoncé l'hypothèse $p(A) \neq 0\ldots$

Par conséquent, l'application p étant une probabilité, on a :

$$p_A(B\cup C)=\frac{p(A\cap(B\cup C))}{p(A)}=\frac{p((A\cap B)\cup(A\cap C))}{p(A)}=\frac{p((A\cap B))+p((A\cap C))}{p(A)}$$
$$=\frac{p((A\cap B))}{p(A)}+\frac{p((A\cap C))}{p(A)}=p_A(B)+p_A(C)$$

Ainsi, pour tout couple (B,C) d'évènements disjoints, on a : $p_A(B\cup C)=p_A(B)+p_A(C)\quad(\clubsuit)$

Conclusion. D'après $(\spadesuit)$, $(\heartsuit)$ et $(\clubsuit)$, l'application p_A est une probabilité sur $\mathscr{P}(\Omega)$.

Exercice 3. — Une urne contient 3 billes vertes et 5 billes rouges toutes indiscernables au toucher. Une partie consiste, pour un joueur, à tirer au hasard une bille de l'urne ; il note sa couleur et ne remet pas la bille dans l'urne. Puis il tire une seconde bille de l'urne et il note sa couleur.

Calculer la probabilité des évènements suivants : E_1 : "Le joueur a tiré deux billes rouges" et E_2 : "Le joueur a tiré exactement une bille verte".

Notons R_1, R_2, V_1 et V_2 respectivement les évènements "tirer une bille rouge en premier", etc...

On a : $p(E_1)=p(R_1\cap R_2)=p(R_1)\times p_{R_1}(R_2)=\frac{5}{8}\times\frac{4}{7}=\frac{5}{14}$.

D'autre part :

$$p(E_2)=p((V_1\cap R_2)\cup(R_1\cap V_2))=p(V_1)\times p_{V_1}(R_2)+p(R_1)\times p_{R_1}(V_2)=\frac{3}{8}\times\frac{5}{7}+\frac{5}{8}\times\frac{3}{7}=\frac{15}{28}$$

Exercice 4. — Un laboratoire pharmaceutique met au point un test de dépistage d'une maladie et fournit les renseignements suivants : "La population testé comporte 50 % de personnes malades. Si une personne est malade, le test est positif dans 98 % des cas ; si une personne n'est pas malade, le test est positif dans 0,2 % des cas".

On note M l'évènement "la personne est malade", et T l'évènement "le test est positif".

1/ Donner les valeurs de $\mathbb{P}(M)$, $\mathbb{P}_M(T)$, $\mathbb{P}_{\overline{M}}(T)$.

D'après l'énoncé : $\mathbb{P}(M)=\frac{1}{2}$; $\mathbb{P}_M(T)=\frac{98}{100}=\frac{49}{50}$; $\mathbb{P}_{\overline{M}}(T)=\frac{2}{1000}=\frac{1}{500}$.

2/ En déduire $\mathbb{P}(T)$.

Les évènements M et $\overline{M}$ constituent un SCE. D'après la formule des probabilités totales, on en déduit que :

$$\mathbb{P}(T)=\mathbb{P}_M(T)\times\mathbb{P}(M)+\mathbb{P}_{\overline{M}}(T)\times\mathbb{P}(\overline{M})$$

D'après la question précédente :

$$\mathbb{P}(T)=\frac{49}{50}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{500}\times\frac{1}{2}$$

Conclusion. $\mathbb{P}(T)=\frac{491}{1000}$

Exercice 5. — Les statistiques ont permis d'établir qu'en période de compétition, pour un sportif pris au hasard, la probabilité d'être déclaré positif au contrôle antidopage est égale à 0,02. La prise d'un médicament m peut entraîner, chez certains sportifs, un contrôle antidopage positif. En période de compétition, ce médicament, qui diminue fortement les effets de la fatigue musculaire, est utilisé par 25% des sportifs.

Pour un tel sportif, la probabilité d'être déclaré positif au contrôle antidopage est alors de 0,05. Pour un sportif choisi au hasard en période de compétition, on note M et P les événements

M = "utiliser le médicament m" et P = "être déclaré positif au contrôle antidopage"

1/ Calculer la probabilité de l'événement "utiliser le médicament m et être déclaré positif au contrôle".

La probabilité demandée est : $p\,(M \cap P)$. Par définition de probabilité conditionnelle, on a :

$$p\,(M \cap P) = p_M(P) \times p(M)$$

D'après l'énoncé, on a donc :

$$p\,(M \cap P) = \frac{5}{100} \times \frac{1}{4} \qquad \text{soit :} \quad p\,(M \cap P) = \frac{1}{80}$$

2/ Pour un sportif choisi au hasard en période de compétition calculer les probabilités $\mathbb{P}_P\,(M)$ et $\mathbb{P}_{\overline{M}}\,(P)$.

On a : $p_P\,(M) = \dfrac{p\,(M \cap P)}{p(P)} = \dfrac{p_M\,(P) \times p(M)}{p(P)}$.

On en déduit, d'après l'énoncé :

$$p_P\,(M) = \frac{\dfrac{5}{100} \times \dfrac{1}{4}}{\dfrac{1}{50}} = \frac{50}{80} = \frac{5}{8}$$

Conclusion. $p_P\,(M) = \dfrac{5}{8}$

Exercice 6. — Dans un stand de tir, un tireur effectue des tirs successifs pour atteindre plusieurs cibles.
La probabilité que la première cible soit atteinte est $\dfrac{1}{2}$.
Lorsqu'une cible est atteinte, la probabilité que la suivante le soit est $\dfrac{3}{4}$.
Lorsqu'une cible n'est pas atteinte, la probabilité que la suivante soit atteinte est $\dfrac{1}{2}$.
On note, pour tout entier naturel n non nul :

- A_n l'évènement : « la n-ième cible est atteinte ».
- a_n (*resp.*b_n) la probabilité de l'évènement A_n (*resp.*$\overline{A_n}$).

1/ Donner a_1 et b_1. Calculer a_2 et b_2. On pourra utiliser un arbre pondéré.

D'après l'énoncé : $a_1 = b_1 = \dfrac{1}{2}$.

D'après la formule des probabilités totales :

$$a_2 = p(A_2) = p_{A_1}(A_2) \times p(A_1) + p_{\overline{A_1}}(A_2) \times p(\overline{A_1}) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{8}$$

On en déduit que :

$$b_2 = p\left(\overline{A_2}\right) = 1 - p(A_2) = 1 - a_2 = \frac{3}{8}$$

2/ Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 1$: $a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{2}b_n$. Puis établir que : $a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La famille $\left\{A_n, \overline{A_n}\right\}$ constitue un SCE. D'après la formule des probabilités totales :

$$a_{n+1} = p(A_{n+1}) = p_{A_n}(A_{n+1}) \times p(A_n) + p_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) \times p(\overline{A_n}) = \frac{3}{4} \times a_n + \frac{1}{2} \times b_n$$

Or : $b_n = p(\overline{A_n}) = 1 - p(A_n) = 1 - a_n$. D'où :

$$a_{n+1} = \frac{3}{4} \times a_n + \frac{1}{2} \times (1 - a_n) = \frac{1}{4} \times a_n + \frac{1}{2}$$

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_{n+1} = \frac{1}{4} \times a_n + \frac{1}{2}$.

3/ Déduire de la question précédente l'expression de a_n en fonction de n, puis la limite de la suite (a_n).

D'après la question précédente, la suite (a_n) est une suite arithmético-géométrique. On introduit donc judicieusement la suite u définie en posant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = a_n - \ell \text{ où le réel } \ell \text{ est tel que : } \ell = \frac{1}{4} \times \ell + \frac{1}{2}$$

Un calcul immédiat donne : $\ell = \frac{2}{3}$. On peut alors vérifier que u est géométrique de raison $1/4$. On en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \underbrace{-\frac{1}{6}}_{=u_1} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

Il s'ensuit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \frac{2}{3} - \frac{1}{6} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

En particulier, la suite a est convergente, et a pour limite $2/3$.

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \frac{2}{3} - \frac{1}{6} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ d'où : $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \frac{2}{3}$

Exercice 7. — Marche aléatoire sur un carré.

ABCD est un carré de centre O. Un jeton posé sur l'un des cinq points peut se déplacer de façon aléatoire vers l'un des autres voisins suivant le mode suivant : tous les pas issus de l'un sommets A, B, C et D ont pour probabilité 1/3 ; et tous les pas issus de O ont une probabilité de 1/4. Un chemin est une suite de pas successifs. Au départ le jeton est en A.

1/ Le jeton fait deux pas. Calculer la probabilité qu'il arrive en A, en B, en C, en D, en O ?

Notons a_n, b_n, etc... les probabilités que le jeton arrive respectivement en A, en B, etc... au bout de n pas.

Les évènements A_1, B_1, C_1, D_1 et O_1 constituent un SCE. D'après la formule des probabilités totales, on a donc :

$$a_2 = p_{A_1}(A_2) \times p(A_1) + p_{B_1}(A_2) \times p(B_1) + p_{C_1}(A_2) \times p(C_1) + p_{D_1}(A_2) \times p(D_1) + p_{O_1}(A_2) \times p(O_1)$$

Or, d'après l'énoncé :

$$a_2 = p_{A_1}(A_2) \times \underbrace{p(A_1)}_{=0} + p_{B_1}(A_2) \times p(B_1) + p_{C_1}(A_2) \times \underbrace{p(C_1)}_{=0} + p_{D_1}(A_2) \times p(D_1) + p_{O_1}(A_2) \times p(O_1)$$

Puis :

$$a_2 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9} \times \frac{1}{12} = \frac{11}{36}$$

Sur le même principe :

$$b_2 = p_{O_1}(B_2) \times p(0_1) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12} \qquad \text{et : } d_2 = b_2 = \frac{1}{12}$$

Enfin :

$$c_2 = p_{O_1}(C_2) \times p(0_1) + p_{D_1}(C_2) \times p(D_1) + p_{B_1}(C_2) \times p(B_1) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{11}{36}$$

Et :

$$o_2 = p_{D_1}(O_2) \times p(D_1) + p_{B_1}(O_2) \times p(B_1) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$$

Conclusion. $a = 2 = c_2 = \dfrac{11}{36}$; $b_2 = d_2 = \dfrac{1}{12}$ et $o_2 = \dfrac{2}{9}$.

Remarque. On peut observer, et c'est rassurant, que : $a_2 + b_2 + c_2 + d_2 + o_2 = 1$.

2/ Il fait un pas de plus. Quelle est la probabilité qu'il arrive en O ?

D'après la formule des probabilités totales et l'énoncé :

$$o_3 = p_{A_2}(O_3) \times a_2 + p_{B_2}(O_3) \times b_2 + p_{C_2}(O_3) \times c_2 + p_{D_2}(O_3) \times d_2$$

D'après la question précédente, on a donc :

$$o_3 = \frac{1}{3} \times (a_2 + b_2 + c_2 + d_2) = \frac{1}{3} \times (1 - o_2) = \frac{1}{3} \times (1 - o_2) = \frac{1}{3} \times \left(1 - \frac{2}{9}\right)$$

Conclusion. $o_3 = \dfrac{7}{27}$

3/ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note p_n la probabilité pour que le jeton arrive en O après n pas. Démontrer que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad p_{n+1} = \frac{1}{3}\left(1 - p_n\right)$$

Les évènements A_n, B_n, C_n, D_n et O_n constituent un SCE. D'après la formule des probabilités totales, on a donc :

$$p_{n+1} = p_{A_n}(O_{n+1}) \times p(A_n) + p_{B_n}(O_{n+1}) \times p(B_n) + p_{C_n}(O_{n+1}) \times p(C_n) + p_{D_n}(O_{n+1}) \times p(D_n) + p_{O_n}(O_{n+1}) \times p(O_n)$$

D'où :

$$p_{n+1} = \frac{1}{3}\left(a_n + b_n + c_n + d_n\right)$$

Or $a_n + b_n + c_n + d_n + p_n = 1$ (puisque les évènements A_n, B_n, C_n, D_n et O_n constituent un SCE).

Conclusion. $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad p_{n+1} = \dfrac{1}{3}\left(1 - p_n\right)$

4/ Expliciter p_n en fonction de n et déterminer $\lim\limits_{n \to \infty} p_n$.

D'après la question précédente, la suite (p_n) est une suite arithmético-géométrique. On introduit donc judicieusement la suite u définie en posant :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = p_n - \ell \text{ où le réel } \ell \text{ est tel que : } \ell = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times \ell$$

Un calcul immédiat donne : $\ell = \dfrac{1}{4}$. On peut alors vérifier que u est géométrique de raison $1/3$. On en déduit que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \underbrace{\frac{1}{12}}_{=u_1} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

Il s'ensuit que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ p_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

En particulier, la suite p est convergente, et a pour limite $1/4$.

Conclusion. $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ p_n = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{12} \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$ d'où : $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = \dfrac{1}{4}$

Variables aléatoires réelles

Exercice 8. — Soit n un entier naturel non nul, et soit α un réel. On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $[\![0;n]\!]$ telle que :

$$\forall\, k \in [\![0;n]\!], \quad P\left(X=k\right) = \alpha k^2$$

1/ Déterminer la valeur de α.

Puisque X est à valeurs dans $[\![0;n]\!]$, on a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(X=k) = 1$.

D'après l'énoncé, on en déduit que :

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha k^2 = 1 \Longleftrightarrow \alpha \sum_{k=0}^{n} k^2 = 1 \Longleftrightarrow \alpha \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = 1$$

Conclusion. $\alpha = \dfrac{6}{n(n+1)(2n+1)}$

2/ Calculer l'espérance de X.

Puisque X est à valeurs dans $[\![0;n]\!]$, on a : $E(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} kP(X=k)$.

D'après l'énoncé et la question précédente, on en déduit que :

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n} \alpha k^3 = \alpha \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{6}{n(n+1)(2n+1)} \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Conclusion. $E(X) = \dfrac{3n(n+1)}{2(2n+1)}$

Exercice 9. — Un joueur lance 10 fois de suite (et de manière indépendante) une pièce truquée de telle sorte que la probabilité d'obtenir “pile” soit égale à $1/3$.

1/ Quelle est la probabilité que le joueur obtienne exactement 5 fois pile ?

Notons X le nombre de “pile” obtenues par le joueur au cours des 10 lancers. D'après l'énoncé (les lancers étant indépendants), X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(10, 1/3)$. Il s'ensuit que :

$$P(X=5) = \binom{10}{5} \times \left(\frac{1}{3}\right)^5 \times \left(\frac{2}{3}\right)^5$$

Conclusion. La probabilité que le joueur obtienne exactement 5 fois pile est : $\dbinom{10}{5} \times \dfrac{2^5}{3^{10}}$.

2/ Quelle est la probabilité que le joueur n'obtienne jamais pile ?

La probabilité que le joueur n'obtienne jamais pile est : $P(X=0) = \dbinom{10}{0} \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^0 \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^{10}$.

Conclusion. La probabilité que le joueur n'obtienne jamais pile est : $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{10}$

3/ Quelle est la probabilité que le joueur obtienne au moins une fois pile ?

La probabilité que le joueur obtienne au moins une fois pile est : $1 - P(X = 0)$.

Conclusion. La probabilité que le joueur obtienne au moins une fois pile est : $1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^{10}$

Exercice 10. — Deux joueurs lancent 10 fois de suite (et de manière indépendante) une pièce équilibrée. Quelle est la probabilité que les deux joueurs obtiennent le même nombre de "pile" au cours des 10 lancers.

Notons p la probabilité recherchée.

Notons encore X et Y les nombres de "pile" obtenues par chacun des deux joueurs au cours des 10 lancers. D'après l'énoncé (les lancers étant indépendants, et la pièce bien équilibrée), X et Y suivent la loi binomiale $\mathscr{B}(10, 1/2) \quad (\spadesuit)$.

Par ailleurs, les joueurs obtiennent le même nombre de "pile" au cours des 10 lancers SSI ils obtiennent tous les deux 0 "pile", ou 1 "pile",..., ou 10 "pile".

En d'autres termes, les joueurs obtiennent le même nombre de "pile" au cours des 10 lancers SSI

$$(X = 0 \cap Y = 0) \text{ ou } (X = 1 \cap Y = 1) \ldots (X = 10 \cap Y = 10)$$

Les évènements $(X = k \cap Y = k)$ étant deux à deux disjoints, on a :

$$p = \sum_{k=0}^{10} P\left(X = k \cap Y = k\right)$$

Puisque les joueurs jouent de manière indépendante (énoncé), les évènements $X = k$ et $Y = k$ sont indépendants, d'où :

$$p = \sum_{k=0}^{10} P\left(X = k\right) \times p\left(Y = k\right)$$

D'après $(\spadesuit)$, on en déduit que :

$$p = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k}^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{2k} \left(\frac{1}{2}\right)^{20-2k}$$

D'où :

$$p = \frac{1}{2^{20}} \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k}^2$$

Il reste à voir que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k}^2 = \binom{20}{10}$ pour conclure.[†]

Conclusion. La probabilité que les deux joueurs obtiennent le même nombre de "pile" au cours des 10 lancers est : $\dfrac{1}{2^{20}}\dbinom{20}{10}$.

†. Cette dernière somme n'est pas triviale ; mais on l'a déjà établie dans le cours sur les polynômes (application de la formule de Leibniz).

Exercice 11. — Une variable aléatoire réelle X suit la loi binomiale de taille n et de paramètre p. Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire $Y = n - X$?

Par hypothèse, $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$ et $Y = n - X$. Il s'ensuit que : $Y(\Omega) = [\![0, n]\!]$.

En outre, pour tout entier $k \in [\![0, n]\!]$, on a :

$$P(Y = k) = P(X = n - k) = \binom{n}{n-k} p^{n-k}(1-p)^k = \binom{n}{k}(1-p)^k p^{n-k}$$

Conclusion. $Y(\Omega) = [\![0, n]\!]$ et : $\forall k \in [\![0, n]\!],\ P(Y = k) = \binom{n}{k}(1-p)^k p^{n-k}$. Donc Y suit la loi binomiale de taille n et de paramètre $(1-p)$.

Exercice 12. — Une variable aléatoire réelle X suit la loi binomiale de taille n et de paramètre $p \in]0; 1[$. Pour quelle valeur de k, la probabilité $p_k = P(X = k)$ est-elle maximale ?

Par hypothèse, $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$. Pour tout entier $k \in [\![0, n]\!]$, on a : $p_k = P(X = k) > 0$ et :

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} = \frac{\binom{n}{k+1} p^{k+1}(1-p)^{n-k-1}}{\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}} = \frac{\binom{n}{k+1} p}{\binom{n}{k}(1-p)} = \frac{(n-k)p}{(k+1)(1-p)}$$

On en déduit que :

$$p_{k+1} \geqslant p_k \iff \frac{(n-k)p}{(k+1)(1-p)} \geqslant 1 \iff (n-k)p \geqslant (k+1)(1-p) \iff k \leqslant (n+1)p - 1$$

D'où :

$$p_{k+1} \geqslant p_k \iff k \leqslant \lfloor (n+1)p - 1 \rfloor$$

Conclusion. p_k est maximale lorsque $k = \lfloor (n+1)p \rfloor$.

Exercice 13. — Un archer tire sur n cibles. A chaque tir, il a la probabilité p de toucher la cible et les tirs sont supposés indépendants.

Il tire une première fois sur chaque cible et on note X le nombre de cibles atteintes lors de ce premier jet.

L'archer tire ensuite une seconde fois sur les cibles restantes et l'on note Y le nombre de cibles touchées lors de cette tentative.

Déterminer la loi de la variable $Z = X + Y$.

D'après l'énoncé : $Z(\Omega) = [\![0, n]\!]$.

Soit $k \in [\![0, n]\!]$. On a :

$$P(Z = k) = P(X + Y = k) = P\left(\bigcup_{i=0}^{k} (X = i \cap Y = k - i)\right) = \sum_{i=0}^{k} P\left(X = i \cap Y = k - i\right)$$

D'où :

$$P(Z = k) = \sum_{i=0}^{k} P\left(X = i\right) P_{X=i}\left(Y = k - i\right)$$

Donc :

$$P(Z=k)=\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}\binom{n-i}{k-i}p^{k-i}(1-p)^{n-k}=p^k(1-p)^{2n-k}\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{n-i}{k-i}(1-p)^{-i}$$

D'où :

$$P(Z=k)=p^k(1-p)^{2n-k}\sum_{i=0}^{k}\frac{n!}{i!(n-i)!}\frac{(n-i)!}{(k-i)!(n-k)!}\left(\frac{1}{1-p}\right)^i$$

$$\Longleftrightarrow P(Z=k)=p^k(1-p)^{2n-k}\sum_{i=0}^{k}\frac{n!}{i!k!}\frac{k!}{(k-i)!(n-k)!}\left(\frac{1}{1-p}\right)^i$$

$$\Longleftrightarrow P(Z=k)=p^k(1-p)^{2n-k}\sum_{i=0}^{k}\frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{k!}{i!(k-i)!}\left(\frac{1}{1-p}\right)^i$$

$$\Longleftrightarrow P(Z=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{2n-k}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\left(\frac{1}{1-p}\right)^i$$

$$\Longleftrightarrow P(Z=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{2n-k}\left(1+\frac{1}{1-p}\right)^k$$

$$\Longleftrightarrow P(Z=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{2n-k}\left(\frac{2-p}{1-p}\right)^k$$

$$\Longleftrightarrow P(Z=k)=\binom{n}{k}\left[(2-p)p\right]^k\left[(1-p)^2\right]^{n-k}$$

Conclusion. $Z(\Omega)=[\![\, 0,n\,]\!]$ et : $\forall\, k\in[\![\, 0,n\,]\!],\ P(Z=k)=\binom{n}{k}\left[(2-p)p\right]^k\left[(1-p)^2\right]^{n-k}$. Donc Z suit la loi binomiale de taille n et de paramètre $(2-p)p$.

Exercice 14. — Soit p un réel tel que : $0<p<1$.
Un joueur répète de manière successive et indépendante une expérience au cours de laquelle il peut connaître un succès (avec la probabilité p) ou un échec (avec la probabilité $q=1-p$).
Le jeu s'arrête au premier succès.
On note X la variable aléatoire égale au rang du premier succès.
Au cours de cet exercice, on pourra au besoin noter S_k l'évènement "le joueur a obtenu un succès au cours de la k-ième expérience", et E_k l'évènement $\overline{S}_k$ (pour tout entier naturel non nul k).

1/ Indiquer quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire X, justifier brièvement que $P(X=2)=qp$. Que vaut $P(X=3)$?

2/ Pour tout entier naturel non nul N, calculer $P(X\leqslant N)$.

3/ Vérifier que : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\left[\sum_{k=1}^{N}P(X=k)\right]=1$.

4/ Calculer l'espérance de X.

1/ On a : $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

De plus : $P(X=2) = P\left(\overline{S_1} \cap S_2\right) = P\left(\overline{S_1}\right) \times P\left(S_2\right) = qp$ (puisque les expériences sont indépendantes).

De même : $P(X=3) = P\left(\overline{S_1} \cap \overline{S_2} \cap S_3\right) = P\left(\overline{S_1}\right) \times P\left(\overline{S_2}\right) \times P\left(S_3\right) = q^2 p$ (de nouveau puisque les expériences sont indépendantes).

2/ Soit N un entier naturel non nul. On a :

$$P(X \leqslant N) = \sum_{k=1}^{N} P(X=k) = \sum_{k=1}^{N} q^{k-1} p = p \sum_{k=0}^{N-1} q^k = p \frac{1-q^N}{1-q}$$

Puisque $1-q=p$, on en déduit finalement que : $P(X \leqslant N) = 1 - q^N$.

3/ D'après la question précédente : $\lim\limits_{N \to +\infty} P(X \leqslant N) = 1$ (car $\lim\limits_{N \to +\infty} q^N = 0$).

4/ L'espérance de X est égale à :

$$E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} kP(X=k) \text{ càd : } E(X) = \lim_{N \to +\infty} \sum_{k=1}^{N} kP(X=k)$$

Or pour tout entier naturel N non nul, on a :

$$\sum_{k=1}^{N} kP(X=k) = \sum_{k=1}^{N} kq^{k-1} p = p \sum_{k=1}^{N} kq^{k-1}$$

En résumé :

$$E(X) = p \lim_{N \to +\infty} \sum_{k=1}^{N} kq^{k-1} \qquad (\spadesuit)$$

Calculons $u_N = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} kq^{k-1}$. A cette fin, on introduit judicieusement une fonction f définie sur $]0,1[$ en posant :

$$f(q) = \sum_{k=1}^{N} q^k$$

Naturellement : $f(q) = \dfrac{1-q^{N+1}}{1-q}$. De plus, f est dérivable sur $]0,1[$ et on a deux expressions pour la dérivée de f.

D'une part :

$$f'(q) = \sum_{k=1}^{N} kq^{k-1} \text{ (on reconnaît l'expression de } u_N\text{)}$$

D'autre part :

$$f'(q) = \frac{-(N+1)q^N(1-q) + 1 - q^{N+1}}{(1-q)^2} = \frac{-(N+1)q^N(1-q) - q^{N+1} + 1}{p^2}$$

Par suite :

$$u_N = \sum_{k=1}^{N} kq^{k-1} = \frac{-(N+1)q^N(1-q) - q^{N+1} + 1}{p^2}$$

Donc :

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{k=1}^{N} kq^{k-1} = \frac{1}{p^2} \qquad (\clubsuit)$$

On déduit de ($\spadesuit$) et ($\clubsuit$) que :

$$E(X) = \frac{1}{p}$$

Exercice 15. — Un joueur débute un jeu au cours duquel il est amené à faire successivement plusieurs parties. La probabilité que le joueur perde la première partie est de 0,2.
Le jeu se déroule ensuite de la manière suivante :

- s'il gagne une partie, alors il perd la partie suivante avec une probabilité de 0,05 ;
- s'il perd une partie, alors il perd la partie suivante avec une probabilité de 0,1.

On appelle : E_1 l'événement « le joueur perd la première partie » ; E_2 l'évènement « le joueur perd la deuxième partie » ; et E_3 l'évènement « le joueur perd la troisième partie ».
Enfin, on appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de fois où le joueur perd lors des trois premières parties.

1/ Traduire la situation décrite dans l'énoncé par un arbre pondéré.

2/ Montrer que la probabilité de l'évènement $(X = 2)$ est égale à 0,031 et celle de l'évènement $(X = 3)$ égale à 0,002.

3/ Déterminer la loi de probabilité de X, puis calculer l'espérance de X.

Exercice 16. — Soit n un entier naturel $\geqslant 2$, et soient X, Y et Z trois variables aléatoires indépendantes suivant la loi binomiale $\mathscr{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$.

1/ Calculer la probabilité $P(X = Y)$.

2/ Quelle est la probabilité que l'une des trois variables soit égale à la somme des deux autres ?

1/ On a : $P(X=Y) = \sum_{k=0}^{n} P(X=k \cap Y=k) = \sum_{k=0}^{n} P(X=k) \times P(Y=k) = \sum_{k=0}^{n} [P(X=k)]^2$.

D'où :

$$P(X=Y) = \sum_{k=0}^{n} \left[\binom{n}{k} \frac{1}{2^k} \frac{1}{2^{n-k}}\right]^2 = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$$

Or : $\displaystyle\binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.‡

Conclusion. $P(X=Y) = \dfrac{1}{2^{2n}}\dbinom{2n}{n}$

2/ Notons p la probabilité que l'une des trois variables (au moins) soit égale à la somme des deux autres.

Alors : $p = \P\left((X=Y+Z)\cup(Y=X+Z)\cup(Z=X+Y)\right) = \P\left(E_X\cup E_Y\cup E_Z\right)$ en notant respectivement E_X, E_Y et E_Z les évènements $(X=Y+Z)$ et $(Y=X+Z)$ et $(Z=X+Y)$.

En utilisant la formule bien connue donnant la probabilité d'une union de trois évènements, on en déduit que :

$$p = \P\left(E_X\right)+\P\left(E_Y\right)+\P\left(E_Z\right)-\P\left(E_X\cap E_Y\right)-\P\left(E_X\cap E_Z\right)-\P\left(E_Y\cap E_Z\right)+\P\left(E_X\cap E_Y\cap E_Z\right)$$

Pour des raisons de symétrie évidentes, on a : $\P\left(E_X\right)=\P\left(E_Y\right)=\P\left(E_Z\right)$ et

$\P\left(E_X\cap E_Y\right)=\P\left(E_X\cap E_Z\right)=\P\left(E_Y\cap E_Z\right)$.

Ainsi : $\boxed{p = 3\P\left(E_X\right)-3\P\left(E_X\cap E_Y\right)+\P\left(E_X\cap E_Y\cap E_Z\right)\quad(\spadesuit)}$

➤ Calcul de $\P\left(E_X\right)$. Les évènements $(X=k)_{k\in[\![0;n]\!]}$ constituent une partition de l'univers, et on peut donc appliquer la formule des probabilités totales pour obtenir :

$$\P\left(E_X\right)=\P\left(X=Y+Z\right)=\sum_{k=0}^{n}\P\left((X=k)\cap(Y+Z=k)\right)$$

Et puisque X et $Y+Z$ sont des variables aléatoires indépendantes :

$$\P\left(E_X\right)=\P\left(X=Y+Z\right)=\sum_{k=0}^{n}\P\left(X=k\right)\P\left(Y+Z=k\right)$$

$$\Longleftrightarrow \P\left(E_X\right)=\sum_{k=0}^{n}\P\left(X=k\right)\sum_{j=0}^{k}\P\left((Y=j)\cap(Z=k-j)\right)$$

Comme Y et Z sont des variables aléatoires indépendantes on a :

$$\P\left(E_X\right)=\sum_{k=0}^{n}\P\left(X=k\right)\sum_{j=0}^{k}\P\left(Y=j\right)\P\left(Z=k-j\right)$$

$$\Longleftrightarrow \P\left(E_X\right)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{2^n}\sum_{j=0}^{k}\binom{n}{j}\frac{1}{2^n}\binom{n}{k-j}\frac{1}{2^n}$$

$$\Longleftrightarrow \P\left(E_X\right)=\frac{1}{2^{3n}}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sum_{j=0}^{k}\binom{n}{j}\binom{n}{k-j}$$

Or, d'après la formule de Vandermonde : $\displaystyle\sum_{j=0}^{k}\binom{n}{j}\binom{n}{k-j}=\binom{2n}{k}$. D'où : $\displaystyle\P\left(E_X\right)=\frac{1}{2^{3n}}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{2n}{k}$.

‡. Résultat établi en cours comme conséquence de la formule de Leibniz.

En utilisant le fait que : $\forall\, k \in [\![0; n]\!]$, $\dbinom{n}{k} = \dbinom{n}{n-k}$ ("symétrie" des coefficients binomiaux), on en déduit que :

$$\P(E_X) = \frac{1}{2^{3n}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k}\binom{2n}{k}$$

En appliquant une fois encore la formule de Vandermonde, on obtient : $\boxed{\P(E_X) = \dfrac{1}{2^{3n}}\dbinom{3n}{n} \quad (\heartsuit)}$.

➤ Calcul de $\P(E_X \cap E_Y)$. L'évènement $E_X \cap E_Y$ est réalisé si et seulement si $X = Y + Z$ et $Y = X + Z$, ce qui entraîne que $X = Y$ et $Z = 0$. Par conséquent :

$$\P(E_X \cap E_Y) = \sum_{k=0}^{n} \P((X = k) \cap (Y = k) \cap (Z = 0))$$

Comme X, Y et Z sont des variables aléatoires indépendantes on a :

$$\P(E_X \cap E_Y) = \sum_{k=0}^{n} \P(X = k)\,\P(Y = k)\,\P(Z = 0)$$

$$\Longleftrightarrow \P(E_X \cap E_Y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\frac{1}{2^n} \times \binom{n}{k}\frac{1}{2^n} \times \frac{1}{2^n}.$$

Donc : $\boxed{\P(E_X \cap E_Y) = \dfrac{1}{2^{3n}} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left[\binom{n}{k}\right]^2}$ c'est-à-dire : $\boxed{\P(E_X \cap E_Y) = \dfrac{1}{2^{3n}}\dbinom{2n}{n} \quad (\diamondsuit)}$

➤ Calcul de $\P(E_X \cap E_Y \cap E_Z)$. L'évènement $E_X \cap E_Y \cap E_Z$ est réalisé si et seulement si $X = Y + Z$, $Y = X + Z$ et $Z = X + Y$, ce qui entraîne que $X = Y = Z = 0$. D'où :

$$\P(E_X \cap E_Y \cap E_Z) = \P((X = 0) \cap (Y = 0) \cap (Z = 0))$$

Comme X, Y et Z sont des variables aléatoires indépendantes on a :

$$\P(E_X \cap E_Y \cap E_Z) = \P(X = 0)\,\P(Y = 0)\,\P(Z = 0)$$

Donc : $\boxed{\P(E_X \cap E_Y \cap E_Z) = \dfrac{1}{2^{3n}} \quad (\clubsuit)}$

Ainsi, d'après $(\spadesuit)$, $(\heartsuit)$, $(\diamondsuit)$ et $(\clubsuit)$ on a : $p = 3\dfrac{1}{2^{3n}}\dbinom{3n}{n} - 3\dfrac{1}{2^{3n}}\dbinom{2n}{n} + \dfrac{1}{2^{3n}}$

Conclusion : si X, Y et Z sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes, chacune suivant une loi binomiale $\mathscr{B}(n, 1/2)$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$), la probabilité p qu'au moins une des trois VAR soit égale à la somme des deux autres est : $p = \dfrac{1}{2^{3n}}\left[3\dbinom{3n}{n} - 3\dbinom{2n}{n} + 1\right]$

EXERCICE 17. — **PROBABILITÉS - CA-DEAU !**

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathscr{B}\left(3, \dfrac{1}{3}\right)$.

On pose $Y = 1 - X$.

Déterminer la loi de probabilité de Y, ainsi que son espérance et sa variance.

Comme X suit la loi binomiale $\mathscr{B}\left(3, \dfrac{1}{3}\right)$, on a $X(\Omega) = [\![0, 3]\!]$, et :

$$\forall k \in [\![0, 3]\!],\ P(X = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{3-k} = \binom{n}{k} \times \frac{2^{3-k}}{27}$$

Explicitement, la loi de X est donc :

x_i	0	1	2	3
p_i	$\dfrac{8}{27}$	$\dfrac{12}{27}$	$\dfrac{6}{27}$	$\dfrac{1}{27}$

On en déduit que $Y(\Omega) = [\![-2, 1]\!]$, et la loi de Y est donnée par le tableau ci-dessous :

y_i	-2	-1	0	1
p_i	$\dfrac{1}{27}$	$\dfrac{6}{27}$	$\dfrac{12}{27}$	$\dfrac{8}{27}$

En outre, d'après le cours : $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ E(aX + b) = aE(X) + b$ et $V(aX + b) = a^2 V(X)$.

Toujours d'après le cours, puisque X suit la loi binomiale $\mathscr{B}\left(3, \dfrac{1}{3}\right)$, on a : $E(X) = 1$ et $V(X) = \dfrac{2}{3}$.

On en déduit que : $\boxed{E(Y) = 0 \text{ et } V(Y) = \dfrac{2}{3}}$.

EXERCICE 18. — **PROBABILITÉS**

Soient N un entier supérieur ou égal à 2, et p un réel strictement compris entre 0 et 1.

Une particule se déplace sur une droite en faisant des sauts d'une unité vers la gauche ou vers la droite.

A chaque instant, la probabilité qu'elle aille vers la droite est p et celle qu'elle aille vers la gauche $q = 1 - p$, tous ces déplacements étant supposés indépendants.

Initialement, la particule est en $n \in [\![0, N]\!]$, et elle s'arrête dès qu'elle atteint l'une des extrémités de cet intervalle : 0 ou N.

On note a_n la probabilité que la particule s'arrête en 0.

1/ Justifier brièvement que $a_0 = 1$, et $a_N = 0$.

2/ Montrer que pour tout entier n compris entre 1 et $N - 1$, on a : $\quad a_n = pa_{n+1} + qa_{n-1}$.

3/ En déduire l'expression de a_n en fonction de n, N, p et q *(on pensera à distinguer les cas $p = 1/2$ et $p \neq 1/2$)*.

4/ De la même façon, déterminer la probabilité b_n que la particule s'arrête en N *(en distinguant les mêmes cas)*.

5/ Calculer $a_n + b_n$, et en déduire la probabilité que la particule ne s'arrête jamais.

1/ Si la particule est déjà à la position 0, alors elle s'y immobilise d'où $\boxed{a_0 = 1}$. Si la particule est déjà à la position N, alors elle s'y immobilise et elle ne s'arrête donc pas en 0 d'où $\boxed{a_N = 0}$.

2/ Soit n un entier naturel tel que $0 < n < N$. Puisque n est distinct de 0 et N, la particule se déplace vers la gauche ou vers la droite. Notons respectivement G, D et $Bingo$ les évènements "la particule saute vers la gauche", "la particule saute vers la droite" et "la particule s'immobilise en 0". Les évènements G et $D = \overline{G}$ constituent un système complet d'évènements, et on peut donc légitimement appliquer la formule des probabilités totales pour écrire : $a_n = P\left(Bingo\right) = P\left(Bingo \cap G\right) + P\left(Bingo \cap D\right) = qa_{n-1} + pa_{n+1}$.

Ainsi : $\boxed{\forall n \in [\![1, N-1]\!],\ a_n = qa_{n-1} + pa_{n+1}}$.

3/ D'après la question précédente, on a pour tout entier naturel $n \in [\![1, N-1]\!]$: $a_n = qa_{n-1} + pa_{n+1}$. Il s'ensuit que : $\forall n \in [\![0, N-2]\!],\ pa_{n+2} - a_{n+1} + qa_n = 0$. On reconnaît avec soulagement l'équation d'une SRL2, dont on sait parfaitement déterminer le terme général.

On commence naturellement par écrire l'équation caractéristique associée à cette relation de récurrence :

$$\text{(EC)} \qquad pX^2 - X + q = 0 \qquad \text{pour laquelle le discriminant est } \Delta = 1 - 4pq$$

Puisque $q = 1 - p$, on a encore : $\Delta = 1 - 4p\left(1 - p\right) = 1 - 4p + 4p^2$ d'où finalement : $\boxed{\Delta = (2p-1)^2}$.

On doit donc distinguer deux cas pour obtenir l'expression du terme général de la suite (a_n), suivant que le discriminant est nul (SSI $p = 1/2$) ou strictement positif (SSI $p \neq 1/2$).

➤ <u>1er cas — Si $p = 1/2$</u>. Dans ce cas l'équation caractéristique (EC) admet une unique solution, égale à 1. On en déduit qu'il existe deux réels a et b tels que pour tout entier n on ait : $a_n = an + b$. Pour déterminer les valeurs de a et b, on observe que $a_0 = 1$ et $a_N = 0$. On obtient ainsi $b = 1$ et $a = -1/N$.

D'où finalement : $\boxed{\forall N \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \in [\![0, N]\!],\ a_n = -\dfrac{n}{N} + 1 = \dfrac{N-n}{N}}$.

➤ <u>2ème cas — Si $p \neq 1/2$</u>. Dans ce cas l'équation caractéristique (EC) admet deux solutions, égales à 1 et q/p. On en déduit qu'il existe deux réels a et b tels que pour tout entier n on ait : $a_n = a + bq^n/p^n$. Pour déterminer les valeurs de a et b, on observe que $a_0 = 1$ et $a_N = 0$. On en déduit que $a + b = 1$ et $a + bq^N/p^N = 0$.

$$\text{Donc : } \left\{\begin{array}{rcl} a+b & = & 1 \\ a + b\dfrac{q^N}{p^N} & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a+b & = & 1 \\ b\left(1 - \dfrac{q^N}{p^N}\right) & = & 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a+b & = & 1 \\ b\left(\dfrac{p^N - q^N}{p^N}\right) & = & 1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a & = & 1 - \dfrac{p^N}{p^N - q^N} \\ b & = & \dfrac{p^N}{p^N - q^N} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a & = & -\dfrac{q^N}{p^N - q^N} \\ b & = & \dfrac{p^N}{p^N - q^N} \end{array}\right.$$

Donc : $a_n = -\dfrac{q^N}{p^N - q^N} + \dfrac{p^N}{p^N - q^N} \times \dfrac{q^n}{p^n} = \dfrac{1}{p^N - q^N}\left(-q^N + p^{N-n}q^n\right)$.

Finalement : $\boxed{\forall N \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \in [\![0, N]\!],\ a_n = \dfrac{p^{N-n}q^n - q^N}{p^N - q^N}}$.

4/ Si la particule est déjà à la position 0, alors elle s'y immobilise d'où $\boxed{b_0 = 0}$. Si la particule est déjà à la position N, alors elle s'y immobilise d'où $\boxed{b_N = 1}$.
Soit n un entier naturel tel que $0 < n < N$. Puisque n est distinct de 0 et N, la particule se déplace vers la gauche ou vers la droite. Notons respectivement G, D et $Bingo$ les évènements "la particule saute vers la gauche", "la particule saute vers la droite" et "la particule s'immobilise en 0". D'après la formule des probabilités totales, on a : $b_n = P(Bingo) = P(Bingo \cap G) + P(Bingo \cap D) = qb_{n-1} + pb_{n+1}$.

Ainsi : $\boxed{\forall n \in [\![1, N-1]\!],\ b_n = qb_{n-1} + pb_{n+1}}$.

D'après ce qui précède, on a pour tout entier naturel n : $b_n = qb_{n-1} + pb_{n+1}$.
Il s'ensuit que : $\forall n \in \mathbb{N},\ pb_{n+2} - b_{n+1} + qb_n = 0$. Puis on peut reprendre l'étude faite précédemment : l'équation caractéristique associée à cette relation de récurrence est identique, seules les conditions initiales changent.

On doit donc distinguer les deux mêmes cas pour obtenir l'expression du terme général de la suite (b_n), suivant que le discriminant est nul (SSI $p = 1/2$) ou strictement positif (SSI $p \neq 1/2$).

➤ <u>1er cas — Si $p = 1/2$</u>. Dans ce cas il existe deux réels a et b tels que pour tout entier n on ait : $b_n = an + b$. On peut déterminer les valeurs de a et b, en observant que $b_0 = 0$ et $b_N = 1$. On obtient ainsi $b = 0$ et $a = 1/N$.

D'où finalement : $\boxed{\forall N \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \in [\![0, N]\!],\ b_n = \dfrac{n}{N}}$.

➤ <u>2ème cas — Si $p \neq 1/2$</u>. Dans ce cas il existe deux réels a et b tels que pour tout entier n on ait : $a_n = a + bq^n/p^n$. Pour déterminer les valeurs de a et b, on observe que $b_0 = 0$ et $b_N = 1$. On en déduit que $a + b = 0$ et $a + bq^N/p^N = 1$.

Donc : $$\left\{\begin{array}{rcl} a+b &=& 0 \\ a + b\dfrac{q^N}{p^N} &=& 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a &=& -b \\ b\left(1 - \dfrac{q^N}{p^N}\right) &=& -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a &=& -b \\ b\left(\dfrac{q^N - p^N}{p^N}\right) &=& 1 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a &=& -b \\ b &=& \dfrac{p^N}{q^N - p^N} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a &=& -\dfrac{p^N}{q^N - p^N} \\ b &=& \dfrac{p^N}{q^N - p^N} \end{array}\right.$$

Donc : $b_n = -\dfrac{p^N}{q^N - p^N} + \dfrac{p^N}{q^N - p^N} \times \dfrac{q^n}{p^n} = \dfrac{1}{q^N - p^N}\left(-p^N + p^{N-n}q^n\right)$.

Finalement : $\boxed{\forall N \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \in [\![0, N]\!],\ b_n = \dfrac{p^{N-n}q^n - p^N}{q^N - p^N}}$.

5/ Dans le premier cas ($p = 1/2$), on a : $\forall N \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \in [\![0, N]\!],\ a_n + b_n = \dfrac{n}{N} - \dfrac{N-n}{N} = 1$.

Et dans le second ($p \neq 1/2$) : $\forall N \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \in [\![0, N]\!],\ a_n + b_n = \dfrac{p^{N-n}q^n - q^N}{p^N - q^N} + \dfrac{p^{N-n}q^n - p^N}{q^N - p^N}$

$$= \frac{p^{N-n}q^n - q^N - p^{N-n}q^n + p^N}{p^N - q^N} = \frac{p^N - q^N)}{p^N - q^N)} = 1$$

Dans tous les cas, on a $a_n + b_n = 1$ pour tout $n \in [\![0, N]\!]$.

On peut donc conclure que la probabilité pour que la particule ne s'arrête jamais est nulle.

Exercice 19. — **Probabilités**

Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2, p un réel de $[0,1]$, et X et Y deux variables aléatoires indépendantes.

On suppose que X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$, et que Y suit la loi uniforme sur $[\![0, n]\!]$.

1/ A propos de la loi uniforme $\mathscr{U}([\![0, n]\!])$.

a/ Calculer l'espérance de Y.

b/ Etablir que la variance de Y est : $\quad \mathrm{V}(Y) = \dfrac{n(n+2)}{12}$.

2/ On considère la matrice $C = \begin{pmatrix} X & X \\ Y & Y \end{pmatrix}$.

a/ Calculer la probabilité p_1 que la matrice C soit antisymétrique.

b/ Calculer la probabilité p_2 que la matrice C soit symétrique.

Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2, p un réel de $[0,1]$, et X et Y deux variables aléatoires indépendantes.

On suppose que X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$, et que Y suit la loi uniforme sur $[\![0, n]\!]$.

1/ **A propos de la loi uniforme** $\mathscr{U}([\![0, n]\!])$.

a/ Puisque Y suit la loi $\mathscr{U}([\![0, n]\!])$, on a $Y(\Omega) = [\![0, n]\!]$, et pour tout entier k compris entre 0 et n, on a : $P(Y = k) = \dfrac{1}{n+1}$.

Il s'ensuit que : $E(Y) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n+1} = \frac{n(n+1)}{2\,(n+1)}$. D'où : $\boxed{E(Y) = \dfrac{n}{2}}$.

b/ D'après la formule de Koenig-Huygens : $V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2$. D'après la question précédente : $E(Y)^2 = \dfrac{n^2}{4}$, et d'après la formule de transfert : $E(Y^2) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{n+1} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6\,(n+1)} = \frac{n(2n+1)}{6}$.

On en déduit que : $V(Y) = \dfrac{n(2n+1)}{6} - \dfrac{n^2}{4} = \dfrac{n}{2}\left(\dfrac{2n+1}{3} - \dfrac{n}{2}\right) = \dfrac{n}{2} \times \dfrac{n+2}{6}$.

Conclusion. $V(Y) = \dfrac{n(n+2)}{12}$.

2/ On considère la matrice $C = \begin{pmatrix} X & X \\ Y & Y \end{pmatrix}$.

a/ Puisqu'une matrice antisymétrique possède une diagonale nulle, la matrice C est antisymétrique si et seulement si $X = Y = 0$.

Ainsi : $p_1 = P(X = 0 \cap Y = 0) = P(X = 0) \times P(Y = 0) = (1-p)^n \times \dfrac{1}{n+1}$.

$$\boxed{\textbf{Conclusion}.\ \text{La probabilité } p_1 \text{ que la matrice } C \text{ soit antisymétrique est : } p_1 = \frac{(1-p)^n}{n+1}}.$$

b/ La matrice C est symétrique si et seulement si $X = Y$. Puisque $X(\Omega) = Y(\Omega) = [\![0, n]\!]$, les VAR X et Y sont égales si et seulement si $X = Y = 0$ ou $X = Y = 1$ ou... $X = Y = n$.

D'où : $p_2 = P(X = Y) = P\left(\bigcup_{k=0}^{n} (X = k \cap Y = k)\right) = \sum_{k=0}^{n} P(X = k \cap Y = k) = \sum_{k=0}^{n} P(X = k) \times P(Y = k)$

(l'avant dernière égalité provenant du fait que les évènements $(X = k \cap Y = k)$ sont deux à deux disjoints, et la dernière de l'hypothèse suivant laquelle X et Y sont indépendantes).

Ainsi : $p_2 = \sum_{k=0}^{n} \left[\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \times \dfrac{1}{n+1}\right] = \dfrac{1}{n+1} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}_{=1}$

$$\boxed{\textbf{Conclusion}.\ \text{La probabilité } p_2 \text{ que la matrice } C \text{ soit symétrique est : } p_2 = \frac{1}{n+1}}.$$

EXERCICE 20. — PROBABILITÉS ET DÉRIVÉES

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3.

On suppose que X et Y sont deux VAR indépendantes, suivant la même loi binomiale $\mathscr{B}\left(n, \dfrac{1}{2}\right)$.

On considère les deux transpositions $\sigma = (X\ X+1)$ et $\tau = (Y\ Y+1)$ de S_{n+1}.[§]

L'objectif de l'exercice est de déterminer la probabilité que σ et τ commutent.

A cette fin, on note : $p_n = \mathrm{P}(\sigma\tau = \tau\sigma)$ et $q_n = \mathrm{P}(\sigma\tau \neq \tau\sigma)$.

1/ **Une formule générale**.

a/ Notons $E = \{X, X+1\} \cap \{Y, Y+1\}$. Il est immédiat que le cardinal de E est égal à 0, 1 ou 2.

— Si $\mathrm{card}(E) = 0$. Alors les transpositions σ et τ sont à supports disjoints, et elles commutent donc.

— Si $\mathrm{card}(E) = 2$. Alors $X = Y$ (et $X + 1 = Y + 1\ldots$) ; les transpositions σ et τ sont égales, et elles commutent puisque $\sigma\tau = \sigma^2 = \mathrm{id}_{\mathbb{N}_{n+1}} = \tau\sigma$.

— Si $\mathrm{card}(E) = 1$. Alors on a $X = Y + 1$ ou $Y = X + 1$.
Dans le premier cas, on a donc : $\sigma = (Y+1\, Y+2)$ et $\tau = (Y\, Y+1)$. Il s'ensuit que $\sigma\tau$ est le 3-cycle $(Y\ (Y+2)\ (Y+1))$ tandis que $\tau\sigma$ est le 3-cycle $(Y\ (Y+1)\ (Y+2))$. Ainsi : $\sigma\tau \neq \tau\sigma$.

De même dans le second cas $\sigma\tau \neq \tau\sigma$.

§. Par exemple, lorsque $X = 2$, $\sigma = (23)$ est la transposition qui permute 2 et 3.

On déduit du raisonnement précédent que : $q_n = \mathrm{P}(X = Y+1) + \mathrm{P}(Y = X+1)$. Puisque les variables aléatoires X et Y sont égales, les deux probabilités intervenant dans cette somme le sont aussi.

D'où : $\boxed{q_n = 2\mathrm{P}(X = Y+1)}$.

b/ D'après la question précédente : $q_n = 2\mathrm{P}(X = Y+1)$. Or l'évènement $(X = Y+1)$ est réalisé si et seulement si $(Y = 0$ et $X = 1)$ ou $(Y = 1$ et $X = 2)$ … ou $(Y = n-1$ et $X = n)$. Observons au passage que Y ne peut prendre la valeur n, puisqu'alors X serait égal à $n+1$; or par hypothèse $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$.

Explicitement à présent : $$\mathrm{P}(X = Y+1) = \mathrm{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n-1}(Y = k \cap X = k+1)\right) = \sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{P}(Y = k \cap X = k+1)$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} P(X = k+1) \times P(Y = k)$$

(la deuxième égalité provenant de ce que les évènements $(Y = k \cap X = k+1)$ sont deux à deux disjoints, et la dernière de l'hypothèse suivant laquelle X et Y sont indépendantes).

Par conséquent : $\boxed{q_n = 2\sum_{k=0}^{n-1} P(X = k+1) \times P(Y = k)}$.

2/ **Valeur exacte de q_n, et équivalent au voisinage de $+\infty$.**

On pose, pour tout entier naturel m : $S_{n,m} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n+m}{k+m}$.

a/ On a : $$S_{n,1} - S_{n,0} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n+1}{k+1} - \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left[\binom{n+1}{k+1} - \binom{n}{k}\right] = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{k+1}$$

(la dernière égalité provenant de la relation de Pascal : $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$).

Or : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{k+1} = \underbrace{\binom{n}{n}\binom{n}{n+1}}_{=0} + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}\binom{n}{k+1}$. D'où : $S_{n,1} - S_{n,0} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}\binom{n}{k+1}$.

Par ailleurs : $$q_n = 2\sum_{k=0}^{n-1} P(X = k+1) \times P(Y = k) = 2\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k+1}\frac{1}{2^{k+1}}\frac{1}{2^{n-k-1}} \times \binom{n}{k}\frac{1}{2^k}\frac{1}{2^{n-k}}$$
$$= 2 \times \frac{1}{2^{2n}} \times \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{2^{2n-1}}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}\binom{n}{k+1}$$

On en déduit que : $\boxed{q_n = \frac{1}{2^{2n-1}}(S_{n,1} - S_{n,0})}$.

b/ Selon les théorèmes généraux, la fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et admet à ce titre des dérivées à tout ordre en tout réel.

D'une part : $\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = \dfrac{(2n+m)!}{(n+m)!}x^{n+m} \quad (\spadesuit)$.

D'autre part, on peut judicieusement écrire : $f(x) = g(x)h(x)$ avec $g(x) = x^n$ et $h(x) = x^{n+m}$. Selon la formule de Leibniz, qu'il est légitime d'appliquer puisque g et h sont clairement de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, on a :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g^{(k)}(x) h^{(n-k)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} \frac{(n+m)!}{(k+m)!} x^{k+m}$$

$$= n! \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(n+m)!}{(n-k)!\,(k+m)!} x^{n+m} = n! \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{n+m}{k+m} x^{n+m} \qquad (\clubsuit)$$

En calculant $f^{(n)}(1)$ grâce aux formules ($\spadesuit$) et ($\clubsuit$), on obtient : $n! \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n+m}{k+m} = \frac{(2n+m)!}{(n+m)!}$.

Par suite : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n+m}{k+m} = \frac{(2n+m)!}{(n+m)!n!} \Longleftrightarrow \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n+m}{k+m} = \binom{2n+m}{n}$.

Conclusion. $\forall\,(n,m) \in \mathbb{N}^2,\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n+m}{k+m} = \binom{2n+m}{n}$ soit : $\forall\,(n,m) \in \mathbb{N}^2,\ S_{n,m} = \dbinom{2n+m}{n}$.

c/ D'après les questions a et b, on a : $q_n = \dfrac{1}{2^{2n-1}}\left(\dbinom{2n+1}{n} - \dbinom{2n}{n}\right)$.

D'après la relation de Pascal : $\boxed{q_n = \dfrac{1}{2^{2n-1}}\dbinom{2n}{n-1}}$.

d/ D'après la question c : $q_n = \dfrac{1}{2^{2n-1}}\dfrac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!}$. Et d'après la formule de Stirling : $n! \sim_{+\infty} \sqrt{2n\pi}\left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$.

Il s'ensuit que : $q_n \sim_{+\infty} \dfrac{1}{2^{2n-1}} \dfrac{\sqrt{4n\pi}\left(\dfrac{2n}{\mathrm{e}}\right)^{2n}}{\sqrt{2(n-1)\pi}\left(\dfrac{n-1}{\mathrm{e}}\right)^{n-1}\sqrt{2(n+1)\pi}\left(\dfrac{n+1}{\mathrm{e}}\right)^{n+1}}$

D'où : $q_n \sim_{+\infty} \dfrac{1}{2^{2n-1}\sqrt{\pi}} \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^2-1}} \dfrac{\left(\dfrac{2n}{\mathrm{e}}\right)^{2n}}{\left(\dfrac{n-1}{\mathrm{e}}\right)^{n-1}\left(\dfrac{n+1}{\mathrm{e}}\right)^{n+1}}$

D'où : $q_n \sim_{+\infty} \dfrac{1}{2^{2n-1}\sqrt{\pi}} \dfrac{1}{\sqrt{n}} \dfrac{(2n)^{2n}}{(n-1)^{n-1}(n+1)^{n+1}}$

D'où : $q_n \sim_{+\infty} \dfrac{2}{\sqrt{n}\sqrt{\pi}} \dfrac{n^{2n}}{(n-1)^{n-1}(n+1)^{n+1}} \qquad (\spadesuit)$

Or : $(n+1)^{n+1} = n^{n+1}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1} = n^{n+1}\mathrm{e}^{(n+1)\ln(1+1/n)} = n^{n+1}\mathrm{e}^{(n+1)\left(\frac{1}{n}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\right)}$

Puisque : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(n+1)\left(\frac{1}{n}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 1$, on a : $(n+1)^{n+1} \sim_{+\infty} \mathrm{e}n^{n+1}$.

De la même manière : $(n-1)^{n-1} \sim_{+\infty} \mathrm{e}^{-1}n^{n-1}$.

Par suite : $\dfrac{n^{2n}}{(n-1)^{n-1}(n+1)^{n+1}} \sim_{+\infty} \dfrac{n^{2n}}{\mathrm{e}n^{n+1}\mathrm{e}^{-1}n^{n-1}}$.

Ainsi : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{2n}}{(n-1)^{n-1}(n+1)^{n+1}} = 1 \quad (\clubsuit)$.

On déduit de ($\spadesuit$) et ($\clubsuit$) que : $q_n \sim_{+\infty} \dfrac{2}{\sqrt{n}\sqrt{\pi}}$. $\boxed{\textbf{Conclusion}.\ q_n \sim_{+\infty} \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} n^{-1/2}}$.

e/ On a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{\pi}} n^{-1/2} = 0$. D'après la question précédente : $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} q_n = 0}$.