# Exercices 23 — Probabilités

## Probabilités "basiques", conditionnelles, formule(s) des probas totales

**Exercice 1.** — Soient $\Omega$ l'univers d'une expérience aléatoire, et $p$ une probabilité sur $\Omega$.

Montrer que $p$ est croissante, càd que si $A$ et $B$ désignent deux évènements, alors :

$$[A \subset B] \Longrightarrow [p(A) \leqslant p(B)]$$

**Exercice 2.** — Soient $\Omega$ l'univers d'une expérience aléatoire, $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ un évènement, et $p$ une probabilité sur $\Omega$.

Montrer que $p_A$ est une probabilité sur $\mathscr{P}(\Omega)$.

**Exercice 3.** — Une urne contient 3 billes vertes et 5 billes rouges toutes indiscernables au toucher.

Une partie consiste, pour un joueur, à tirer au hasard une bille de l'urne ; il note sa couleur et ne remet pas la bille dans l'urne. Puis il tire une seconde bille de l'urne et il note sa couleur.

Calculer la probabilité des évènements suivants : $E_1$ : "Le joueur a tiré deux billes rouges" et $E_2$ : "Le joueur a tiré exactement une bille verte".

**Exercice 4.** — Un laboratoire pharmaceutique met au point un test de dépistage d'une maladie et fournit les renseignements suivants : "La population testé comporte 50 % de personnes malades. Si une personne est malade, le test est positif dans 98 % des cas ; si une personne n'est pas malade, le test est positif dans 0,2 % des cas".

On note $M$ l'évènement "la personne est malade", et $T$ l'évènement "le test est positif".

1/ Donner les valeurs de $\mathbb{P}(M)$, $\mathbb{P}_T(T)$, $\mathbb{P}_{\overline{M}}(T)$.

2/ En déduire $\mathbb{P}(T)$.

**Exercice 5.** — Les statistiques ont permis d'établir qu'en période de compétition, pour un sportif pris au hasard, la probabilité d'être déclaré positif au contrôle antidopage est égale à 0,02. La prise d'un médicament m peut entraîner, chez certains sportifs, un contrôle antidopage positif. En période de compétition, ce médicament, qui diminue fortement les effets de la fatigue musculaire, est utilisé par 25% des sportifs.

Pour un tel sportif, la probabilité d'être déclaré positif au contrôle antidopage est alors de 0,05. Pour un sportif choisi au hasard en période de compétition, on note M et P les événements

M = "utiliser le médicament m" et P = "être déclaré positif au contrôle antidopage"

1/ Calculer la probabilité de l'événement "utiliser le médicament m et être déclaré positif au contrôle"

2/ Pour un sportif choisi au hasard en période de compétition calculer les probabilités $\mathbb{P}_P(M)$ et $\mathbb{P}_{\overline{M}}(P)$.

**Exercice 6.** — Dans un stand de tir, un tireur effectue des tirs successifs pour atteindre plusieurs cibles.

La probabilité que la première cible soit atteinte est $\dfrac{1}{2}$.

Lorsqu'une cible est atteinte, la probabilité que la suivante le soit est $\dfrac{3}{4}$.

Lorsqu'une cible n'est pas atteinte, la probabilité que la suivante soit atteinte est $\dfrac{1}{2}$.

On note, pour tout entier naturel $n$ non nul :

- $A_n$ l'évènement : « la $n$-ième cible est atteinte ».
- $a_n$ (*resp.*$b_n$) la probabilité de l'évènement $A_n$ (*resp.*$\overline{A_n}$).

1/ Donner $a_1$ et $b_1$. Calculer $a_2$ et $b_2$. On pourra utiliser un arbre pondéré.

2/ Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 1$ : $a_{n+1} = \dfrac{3}{4}a_n + \dfrac{1}{2}b_n$. Puis établir que : $a_{n+1} = \dfrac{1}{4}a_n + \dfrac{1}{2}$

3/ Déduire de la question précédente l'expression de $a_n$ en fonction de $n$, puis la limite de la suite $(a_n)$.

**Exercice 7. — Marche aléatoire sur un carré.**
ABCD est un carré de centre O. Un jeton posé sur l'un des cinq points peut se déplacer de façon aléatoire vers l'un des autres voisins suivant le mode suivant : tous les pas issus de l'un sommets A, B, C et D ont pour probabilité 1/3 ; et tous les pas issus de O ont une probabilité de 1/4. Un chemin est une suite de pas successifs. Au départ le jeton est en A.

1/ Le jeton fait deux pas. Calculer la probabilité qu'il arrive en A, en B, en C, en D, en O ?

2/ Il fait un pas de plus. Quelle est la probabilité qu'il arrive en O ?

3/ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $p_n$ la probabilité pour que le jeton arrive en O après $n$ pas. Démontrer que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad p_{n+1} = \frac{1}{3}\,(1 - p_n)$$

4/ Expliciter $p_n$ en fonction de $n$ et déterminer $\lim\limits_{n \to \infty} p_n$.

## Variables aléatoires réelles

**Exercice 8.** — Soit $n$ un entier naturel non nul, et soit $\alpha$ un réel. On considère une variable aléatoire $X$ à valeurs dans $[\![ 0; n ]\!]$ telle que :

$$\forall\, k \in [\![ 0; n ]\!], \quad P\,(X = k) = \alpha k^2$$

1) Déterminer la valeur de $\alpha$.

2) Calculer l'espérance de $X$.

**Exercice 9.** — Un joueur lance 10 fois de suite (et de manière indépendante) une pièce truquée de telle sorte que la probabilité d'obtenir “pile” soit égale à 1/3.

1/ Quelle est la probabilité que le joueur obtienne exactement 5 fois pile ?

2/ Quelle est la probabilité que le joueur n'obtienne jamais pile ?

3/ Quelle est la probabilité que le joueur obtienne au moins une fois ?

**Exercice 10.** — Deux joueurs lancent 10 fois de suite (et de manière indépendante) une pièce équilibrée.

Quelle est la probabilité que les deux joueurs obtiennent le même nombre de “pile” au cours des $n$ lancers.

**Exercice 11.** — Une variable aléatoire réelle $X$ suit la loi binomiale de taille $n$ et de paramètre $p$. Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire $Y = n - X$ ?

**Exercice 12.** — Une variable aléatoire réelle $X$ suit la loi binomiale de taille $n$ et de paramètre $p \in ]0; 1[$. Pour quelle valeur de $k$, la probabilité $p_k = P(X = k)$ est-elle maximale ?

**Exercice 13.** — Un archer tire sur $n$ cibles. A chaque tir, il a la probabilité $p$ de toucher la cible et les tirs sont supposés indépendants.
Il tire une première fois sur chaque cible et on note $X$ le nombre de cibles atteintes lors de ce premier jet.

L'archer tire ensuite une seconde fois sur les cibles restantes et l'on note $Y$ le nombre de cibles touchées lors de cette tentative.

Déterminer la loi de la variable $Z = X + Y$.

**Exercice 14.** — Soit $p$ un réel tel que : $0 < p < 1$.

Un joueur répète de manière successive et indépendante une expérience au cours de laquelle il peut connaître un succès (avec la probabilité $p$) ou un échec (avec la probabilité $q = 1 - p$).

Le jeu s'arrête au premier succès.

On note $X$ la variable aléatoire égale au rang du premier succès.

Au cours de cet exercice, on pourra au besoin noter $S_k$ l'évènement "le joueur a obtenu un succès au cours de la $k$-ième expérience", et $E_k$ l'évènement $\overline{S}_k$ (pour tout entier naturel non nul $k$).

1) Indiquer quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire $X$, justifier brièvement que $P(X=2) = qp$. Que vaut $P(X=3)$ ?

2) Pour tout entier naturel non nul $N$, calculer $P(X \leqslant N)$.

3) Vérifier que : $\displaystyle\lim_{N \to +\infty} \left[\sum_{k=1}^{N} P(X=k)\right] = 1$.

4) Calculer l'espérance de $X$.

**Exercice 15.** — Un joueur débute un jeu au cours duquel il est amené à faire successivement plusieurs parties. La probabilité que le joueur perde la première partie est de 0,2.
Le jeu se déroule ensuite de la manière suivante :

- s'il gagne une partie, alors il perd la partie suivante avec une probabilité de 0,05 ;
- s'il perd une partie, alors il perd la partie suivante avec une probabilité de 0,1.

On appelle : $E_1$ l'événement « le joueur perd la première partie » ; $E_2$ l'évènement « le joueur perd la deuxième partie » ; et $E_3$ l'évènement « le joueur perd la troisième partie ».

Enfin, on appelle $X$ la variable aléatoire qui donne le nombre de fois où le joueur perd lors des trois premières parties.

1) Traduire la situation décrite dans l'énoncé par un arbre pondéré.

2) Montrer que la probabilité de l'évènement $(X = 2)$ est égale à 0,031 et celle de l'évènement $(X = 3)$ égale à 0,002.

3) Déterminer la loi de probabilité de $X$, puis calculer l'espérance de $X$.

**Exercice 16.** — Soit $n$ un entier naturel $\geqslant 2$, et soient $X$, $Y$ et $Z$ trois variables aléatoires indépendantes suivant la loi binomiale $\mathscr{B}\left(n, \dfrac{1}{2}\right)$.

1) Calculer la probabilité $P(X = Y)$.

2) Quelle est la probabilité que l'une des trois variables soit égale à la somme des deux autres ?

**EXERCICE 17.** — **PROBABILITÉS - CA-DEAU !**

Soit $X$ une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathscr{B}\left(3, \dfrac{1}{3}\right)$.

On pose $Y = 1 - X$.

Déterminer la loi de probabilité de $Y$, ainsi que son espérance et sa variance.

**EXERCICE 18.** — **PROBABILITÉS**

Soient $N$ un entier supérieur ou égal à 2, et $p$ un réel strictement compris entre 0 et 1.

Une particule se déplace sur une droite en faisant des sauts d'une unité vers la gauche ou vers la droite.

A chaque instant, la probabilité qu'elle aille vers la droite est $p$ et celle qu'elle aille vers la gauche $q = 1 - p$, tous ces déplacements étant supposés indépendants.

Initialement, la particule est en $n \in [\![ 0, N ]\!]$, et elle s'arrête dès qu'elle atteint l'une des extrémités de cet intervalle : 0 ou $N$.

On note $a_n$ la probabilité que la particule s'arrête en 0.

**1**/ Justifier brièvement que $a_0 = 1$, et $a_N = 0$.

**2**/ Montrer que pour tout entier $n$ compris entre 1 et $N - 1$, on a : $\quad a_n = pa_{n+1} + qa_{n-1}$.

**3**/ En déduire l'expression de $a_n$ en fonction de $n$, $N$, $p$ et $q$ *(on pensera à distinguer les cas $p = 1/2$ et $p \neq 1/2$).*

**4**/ De la même façon, déterminer la probabilité $b_n$ que la particule s'arrête en $N$ *(en distinguant les mêmes cas).*

**5**/ Calculer $a_n + b_n$, et en déduire la probabilité que la particule ne s'arrête jamais.

**EXERCICE 19.** — **PROBABILITÉS**

Soient $n$ un entier naturel supérieur ou égal à 2, $p$ un réel de $[0, 1]$, et $X$ et $Y$ deux variables aléatoires indépendantes.

On suppose que $X$ suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$, et que $Y$ suit la loi uniforme sur $[\![ 0, n ]\!]$.

**1**/ **A propos de la loi uniforme** $\mathscr{U}\left([\![ 0, n ]\!]\right)$.

**a**/ Calculer l'espérance de $Y$.

**b**/ Etablir que la variance de $Y$ est : $\quad \mathrm{V}(Y) = \dfrac{n(n+2)}{12}$.

**2**/ On considère la matrice $C = \begin{pmatrix} X & X \\ Y & Y \end{pmatrix}$.

**a**/ Calculer la probabilité $p_1$ que la matrice $C$ soit antisymétrique.

**b**/ Calculer la probabilité $p_2$ que la matrice $C$ soit symétrique.

**EXERCICE 20.** — **PROBABILITÉS ET DÉRIVÉES**

Dans cet exercice, $n$ désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3.

On suppose que $X$ et $Y$ sont deux VAR indépendantes, suivant la même loi binomiale $\mathscr{B}\left(n, \dfrac{1}{2}\right)$.

On considère les deux transpositions $\sigma = (X \ X+1)$ et $\tau = (Y \ Y+1)$ de $S_{n+1}$.*

L'objectif de l'exercice est de déterminer la probabilité que $\sigma$ et $\tau$ commutent.

A cette fin, on note : $p_n = \mathrm{P}(\sigma\tau = \tau\sigma)$ et $q_n = \mathrm{P}(\sigma\tau \neq \tau\sigma)$.

**1/ Une formule générale.**

**a/** En raisonnant sur le cardinal de $\{X, X+1\} \cap \{Y, Y+1\}$, établir que : $q_n = 2\,\mathrm{P}(X = Y+1)$.

**b/** En déduire que : $q_n = 2\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} P(X = k+1) \times P(Y = k)$

**2/ Valeur exacte de $q_n$, et équivalent au voisinage de $+\infty$.**

On pose, pour tout entier naturel $m$ : $S_{n,m} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n+m}{k+m}$.

**a/** Etablir que : $q_n = \dfrac{1}{2^{2n-1}}\left((S_{n,1} - S_{n,0})\right)$.

**b/** Soient $n$ et $m$ deux entiers naturels arbitraires. On pose pour tout réel $x$ : $f(x) = x^{2n+m}$.

En calculant de deux manières différentes la dérivée $n$-ème de $f$, déterminer la valeur de $S_{n,m}$.

**c/** Déduire des questions précédentes l'expression de $q_n$ en fonction de $n$.

**d/** On admet que : $n! \sim_{+\infty} \sqrt{2n\pi}\left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$.†

En déduire que : $q_n \sim_{+\infty} Kn^{\alpha}$ , où $K$ et $\alpha$ sont deux réels que l'on précisera.

**e/** A l'aide de ce qui précède, déterminer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} q_n$.

---

*. Par exemple, lorsque $X = 2$, $\sigma = (23)$ est la transposition qui permute 2 et 3.

†. Cet équivalent est la **formule de Stirling**.