

COLLE 25 – QUESTIONS DE COURS

QUESTION DE COURS 1. — Propriété : Si A et B sont deux évènements d'un univers Ω , alors : $\mathbb{P}_A(\bar{B}) = 1 - \mathbb{P}_A(B)$ et $\mathbb{P}_A(B_1 \cup B_2) = \mathbb{P}_A(B_1) + \mathbb{P}_A(B_2) - \mathbb{P}_A(B_1 \cap B_2)$

Preuve. On se place dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$, où Ω est un ensemble fini.

Soit A un évènement tel que $\mathbb{P}(A) \neq 0$.

Alors pour tout évènement B , on a : $\Omega = B \cup \bar{B}$. D'où : $A \cap \Omega = A \cap (B \cup \bar{B})$.

Or $A \cap \Omega = A$ (puisque $A \subset \Omega$) ; et $A \cap (B \cup \bar{B}) = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$ (distributivité de $\cap$ par rapport à $\cup$).

On en déduit que $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}((A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}))$.

Or l'union $(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$ est disjointe*, donc (par définition de probabilité) :

$$\mathbb{P}((A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap \bar{B})$$

En résumé, on a établi que : $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap \bar{B})$, d'où en divisant tous les termes de cette égalité par $\mathbb{P}(A)$ (qui est non nulle) : $1 = \mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}_A(\bar{B})$, soit finalement : $\mathbb{P}_A(\bar{B}) = 1 - \mathbb{P}_A(B)$.

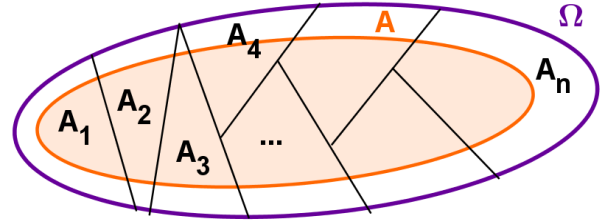
► Pour le second point, on considère B_1 et B_2 deux évènements arbitraires dans Ω . On a alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_A(B_1 \cup B_2) &= \frac{\mathbb{P}((B_1 \cup B_2) \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}((B_1 \cap A) \cup (B_2 \cap A))}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(B_1 \cap A) + \mathbb{P}(B_2 \cap A) - \mathbb{P}((B_1 \cap B_2) \cap A)}{\mathbb{P}(A)} \\ &= \mathbb{P}_A(B_1) + \mathbb{P}_A(B_2) - \mathbb{P}_A(B_1 \cap B_2) \end{aligned}$$

QUESTION DE COURS 2. — Théorème (formule des probabilités totales) : soit A un évènement, et soit $(A_i)_{i=1, \dots, n}$ un système complet d'évènements, alors :

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}_{A_i}(A) \times \mathbb{P}(A_i)$$

Illustration. Sur la figure ci-contre, on a fait apparaître le fait que la probabilité de l'évènement A est la somme des probabilités des “petits morceaux” qui composent A , c'est-à-dire la somme des probabilités des évènements $A \cap A_1, \dots, A \cap A_n$.



Preuve. Soient donc A un évènement et $(A_i)_{i=1, \dots, n}$ un système complet d'évènements.

Le point-clé consiste ici à observer que les évènements $(A \cap A_i)$ sont deux à deux disjoints, et recouvrent A . En clair, il s'agit d'établir les deux faits suivants :

$$1) \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, i \neq j \implies (A \cap A_i) \cap (A \cap A_j) = \emptyset \quad \text{et} \quad 2) \bigcup_{i=1}^n (A \cap A_i) = A$$

► Pour le point 1 : il suffit d'observer que pour tout couple (i, j) d'entiers (compris entre 1 et n), on a† : $(A \cap A_i) \cap (A \cap A_j) = A \cap (A_i \cap A_j)$. Or si $i \neq j$, alors $A_i \cap A_j = \emptyset$ puisque les A_i constituent un SCE par hypothèse. On en déduit le point 1).

► Pour le point 2 : comme $(A_i)_{i=1, \dots, n}$ est un système complet d'évènements, on peut déjà affirmer que :

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^n A_i. \text{ On en déduit que : } A \cap \Omega = A \cap \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right). \text{ En utilisant encore une fois la distributivité de } \cap \text{ par}$$

rapport à $\cup$, on obtient : $A = \bigcup_{i=1}^n (A \cap A_i)$, ce qui établit le point 2.

*. C'est-à-dire : $(A \cap B) \cap (A \cap \bar{B}) = \emptyset$. La preuve de ce fait est triviale, puisque si un élément appartient aux deux termes de l'intersection, alors il est à la fois dans B , et dans son complémentaire $\bar{B}$.

†. En utilisant l'associativité de l'intersection d'une part, et la propriété décoiffante selon laquelle $A \cap A = A$.

► Conclusion : d'après ce qui précède $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n (A \cap A_i)\right)$. Et puisque d'après le 1), les événements $(A \cap A_i)$ sont deux à deux disjoints, la probabilité de leur réunion est la somme de leurs probabilités individuelles, soit :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n (A \cap A_i)\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A \cap A_i) \quad \text{d'où} \quad \mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A \cap A_i)$$

Il reste à voir que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ on a : $\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A \cap A_i) = \mathbb{P}_{A_i}(A) \times \mathbb{P}(A_i)$ (par définition de probabilité

conditionnelle) pour conclure : $\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A \cap A_i)$.

QUESTION DE COURS 3. — Propriétés de l'espérance et de la variance Soit X une VAR sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$. Alors :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, E(aX + b) = aE(X) + b \quad \text{et} \quad V(aX + b) = a^2V(X)$$

Preuve. Notons $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$, et pour tout entier i compris entre 1 et n notons : $x_i = X(\omega_i)$ et $p_i = P(X = x_i)$. Soient a et b deux réels arbitraires.

La variable aléatoire $aX + b$ prend les valeurs : $ax_1 + b, \dots, ax_n + b$ avec les probabilités $p_1, \dots, p_n$. Il s'ensuit que :

$$E(aX + b) = \sum_{i=1}^n (ax_i + b) p_i = \sum_{i=1}^n (ax_i p_i + b p_i) = a \sum_{i=1}^n x_i p_i + b \underbrace{\sum_{i=1}^n p_i}_{=1} = aE(X) + b$$

Notons $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$, et pour tout entier i compris entre 1 et n notons : $x_i = X(\omega_i)$ et $p_i = P(X = x_i)$. Soient a et b deux réels arbitraires.

La variable aléatoire $aX + b$ prend les valeurs : $ax_1 + b, \dots, ax_n + b$ avec les probabilités $p_1, \dots, p_n$. D'où :

$$\begin{aligned} V(aX + b) &= \sum_{i=1}^n (ax_i + b - E(aX + b))^2 p_i = \sum_{i=1}^n (ax_i + b - aE(X) - b)^2 p_i \\ &= \sum_{i=1}^n a^2 (x_i - E(X))^2 p_i = a^2 \sum_{i=1}^n (x_i - E(X))^2 p_i = a^2 V(X) \end{aligned}$$

QUESTION DE COURS 4. — Propriétés des probabilités. Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire, et soit $\mathbb{P}$ une probabilité sur Ω .

1/ $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$

2/ Pour tout événement $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$

3/ Pour tout couple (A, B) d'événements de $\mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

Preuve. Le point 1 est une conséquence de la définition. En effet, on a d'une part $\mathbb{P}(\Omega) = 1$; et d'autre part les événements Ω et $\emptyset$ sont disjoints. On en déduit que :

$$\mathbb{P}(\Omega \cup \emptyset) = \mathbb{P}(\Omega) + \mathbb{P}(\emptyset) \quad \text{d'où} : \mathbb{P}(\emptyset) = 1 - \mathbb{P}(\Omega) \quad \text{soit} \quad \mathbb{P}(\emptyset) = 0.$$

Prouvons le point 2 : soit $A \in \mathcal{P}(\Omega)$. Les événements A et $\bar{A}$ étant disjoints, on a : $\mathbb{P}(A \cup \bar{A}) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\bar{A})$. Par ailleurs, puisque $A \cup \bar{A} = \Omega$, on a : $\mathbb{P}(A \cup \bar{A}) = 1$. On déduit de ces deux relations que : $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.

Prouvons le point 3 : soient A et B deux événements dans Ω . On observe judicieusement que l'évènement $A \cup B$ est la réunion disjointe[‡] de $A \setminus B$ et de B .

Il s'ensuit que :

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A \setminus B) + \mathbb{P}(B) \quad (\spadesuit)$$

Par ailleurs, l'évènement A est aussi la réunion disjointe de $A \setminus B$ et de $A \cap B$. D'où :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \setminus B) + \mathbb{P}(A \cap B) \quad (\clubsuit)$$

On déduit de $(\spadesuit)$ et de $(\clubsuit)$ que : $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

QUESTION DE COURS 5. — Théorème (formule de Koenig-Huygens) : avec les mêmes notations que ci-dessus, $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$.

Preuve. Puisque l'univers Ω est supposé fini dans ce chapitre, on pourra noter x_i les valeurs prises par la VAR X , et p_i les probabilités correspondantes.

Avec les notations usuelles :

$$V(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - E(X))^2 p_i = \underbrace{\sum_{i=1}^n x_i^2 p_i}_{=E(X^2)} - 2E(X) \underbrace{\sum_{i=1}^n x_i p_i}_{=E(X)} + E(X)^2 \underbrace{\sum_{i=1}^n p_i}_{=1} \text{ d'où : } V(X) = E(X^2) - 2E(X)^2 + E(X)^2$$

$$\text{soit } V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

QUESTION DE COURS 6. — Propriété (espérance de la loi binomiale) : si X suit la loi binomiale $B(n, p)$, alors $E(X) = np$.

$$\text{Preuve. On a : } E(X) = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \text{ d'où : } E(X) = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

$$\text{Or pour tout } k \in \mathbb{N}^* : k \binom{n}{k} = k \frac{n!}{k! (n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)! (n-k)!} = n \frac{(n-1)!}{(k-1)! (n-k)!} = n \binom{n-1}{k-1}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } E(X) &= \sum_{k=1}^n n \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k} = n \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k} = n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^{k+1} (1-p)^{n-1-k} \\ &= np \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k} = np \underbrace{(p + (1-p))^{n-1}}_{=1} \text{ donc } E(X) = np \end{aligned}$$

[‡]. Dire qu'une partie P est la *réunion disjointe* de deux parties P_1 et P_2 signifie que $P = P_1 \cup P_2$, et que $P_1 \cap P_2 = \emptyset$.

BANQUE D'EXERCICES

EXERCICE 1. — Un laboratoire pharmaceutique met au point un test de dépistage d'une maladie et fournit les renseignements suivants : "La population testée comporte 50 % de personnes malades. Si une personne est malade, le test est positif dans 98 % des cas ; si une personne n'est pas malade, le test est positif dans 0,2 % des cas".

On note M l'évènement "la personne est malade", et T l'évènement "le test est positif".

1/ Donner les valeurs de $\mathbb{P}(M)$, $\mathbb{P}_M(T)$, $\mathbb{P}_{\overline{M}}(T)$.

2/ En déduire $\mathbb{P}(T)$.

EXERCICE 2. — Une variable aléatoire réelle X suit la loi binomiale de taille n et de paramètre p . Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire $Y = n - X$?

EXERCICE 3. — Une variable aléatoire réelle X suit la loi binomiale de taille n et de paramètre $p \in]0; 1[$. Pour quelle valeur de k , la probabilité $p_k = P(X = k)$ est-elle maximale ?

EXERCICE 4. — Soit n un entier ≥ 2 , et soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n, 1/2)$.

Calculer la probabilité $P(X = Y)$.

EXERCICE 5. — Soient n un entier ≥ 2 , et Y une VAR suivant la loi uniforme sur $\llbracket 0, n \rrbracket$.

Calculer l'espérance et la variance de Y .

EXERCICE 6. — **Formule de Vandermonde, révision.** Etablir que :

$$\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, \binom{n+m}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{m}{n-k}$$

BANQUE D'EXERCICES - CORRIGÉS

EXERCICE 1. — Un laboratoire pharmaceutique met au point un test de dépistage d'une maladie et fournit les renseignements suivants : “La population testée comporte 50 % de personnes malades. Si une personne est malade, le test est positif dans 98 % des cas ; si une personne n'est pas malade, le test est positif dans 0,2 % des cas”.

On note M l'évènement “la personne est malade”, et T l'évènement “le test est positif”.

1/ Donner les valeurs de $\mathbb{P}(M)$, $\mathbb{P}_M(T)$, $\mathbb{P}_{\overline{M}}(T)$.

$$\text{D'après l'énoncé : } \mathbb{P}(M) = \frac{1}{2} ; \mathbb{P}_M(T) = \frac{98}{100} = \frac{49}{50} ; \mathbb{P}_{\overline{M}}(T) = \frac{2}{1000} = \frac{1}{500}.$$

2/ En déduire $\mathbb{P}(T)$.

Les évènements M et $\overline{M}$ constituent un SCE. D'après la formule des probabilités totales, on en déduit que :

$$\mathbb{P}(T) = \mathbb{P}_M(T) \times \mathbb{P}(M) + \mathbb{P}_{\overline{M}}(T) \times \mathbb{P}(\overline{M})$$

D'après la question précédente :

$$\mathbb{P}(T) = \frac{49}{50} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{500} \times \frac{1}{2}$$

$$\text{Conclusion. } \mathbb{P}(T) = \frac{491}{1000}$$

EXERCICE 2. — Une variable aléatoire réelle X suit la loi binomiale de taille n et de paramètre p . Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire $Y = n - X$?

Par hypothèse, $X(\Omega) =]0, n]$ et $Y = n - X$. Il s'ensuit que : $Y(\Omega) =]0, n]$.

En outre, pour tout entier $k \in]0, n]$, on a :

$$P(Y = k) = P(X = n - k) = \binom{n}{n-k} p^{n-k} (1-p)^k = \binom{n}{k} (1-p)^k p^{n-k}$$

Conclusion. $Y(\Omega) =]0, n]$ et : $\forall k \in]0, n]$, $P(Y = k) = \binom{n}{k} (1-p)^k (1 - (1-p))^{n-k}$. Donc Y suit la loi binomiale de taille n et de paramètre $(1-p)$.

EXERCICE 3. — Une variable aléatoire réelle X suit la loi binomiale de taille n et de paramètre $p \in]0; 1[$. Pour quelle valeur de k , la probabilité $p_k = P(X = k)$ est-elle maximale ?

Par hypothèse, $X(\Omega) =]0, n]$. Pour tout entier $k \in]0, n]$, on a : $p_k = P(X = k) > 0$ et :

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} = \frac{\binom{n}{k+1} p^{k+1} (1-p)^{n-k-1}}{\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}} = \frac{\binom{n}{k+1} p}{\binom{n}{k} (1-p)} = \frac{(n-k)p}{(k+1)(1-p)}$$

On en déduit que :

$$p_{k+1} \geq p_k \iff \frac{(n-k)p}{(k+1)(1-p)} \geq 1 \iff (n-k)p \geq (k+1)(1-p) \iff k \leq (n+1)p - 1$$

D'où :

$$p_{k+1} \geq p_k \iff k \leq \lfloor (n+1)p - 1 \rfloor$$

Conclusion. p_k est maximale lorsque $k = \lfloor (n+1)p \rfloor$.

EXERCICE 4. — Soit n un entier ≥ 2 , et soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n, 1/2)$.

Calculer la probabilité $P(X = Y)$.

$$\text{On a : } P(X = Y) = \sum_{k=0}^n P(X = k \cap Y = k) = \sum_{k=0}^n P(X = k) \times P(Y = k) = \sum_{k=0}^n [P(X = k)]^2.$$

D'où :

$$P(X = Y) = \sum_{k=0}^n \left[\binom{n}{k} \frac{1}{2^k} \frac{1}{2^{n-k}} \right]^2 = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$$

Or : $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} = \binom{2n}{n}$ (la 1ère égalité provenant de la symétrie des coefficients binomiaux ; la seconde provenant de la formule de Vandermonde)

$$\text{Conclusion. } P(X = Y) = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n}$$

EXERCICE 5. — Soient n un entier ≥ 2 , et Y une VAR suivant la loi uniforme sur $\llbracket 0, n \rrbracket$.

Calculer l'espérance et la variance de Y .

Puisque Y suit la loi $\mathcal{U}(\llbracket 0, n \rrbracket)$, on a $Y(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$, et pour tout entier k compris entre 0 et n , on a :

$$P(Y = k) = \frac{1}{n+1}.$$

$$\text{Il s'ensuit que : } E(Y) = \sum_{k=0}^n \frac{k}{n+1} = \frac{n(n+1)}{2(n+1)}. \text{ D'où : } \boxed{E(Y) = \frac{n}{2}}.$$

D'après la formule de Koenig-Huygens : $V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2$.

$$\text{D'après ce qui précède : } E(Y)^2 = \frac{n^2}{4}.$$

$$\text{D'après la formule de transfert : } E(Y^2) = \sum_{k=0}^n \frac{k^2}{n+1} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6(n+1)} = \frac{n(2n+1)}{6}.$$

$$\text{On en déduit que : } V(Y) = \frac{n(2n+1)}{6} - \frac{n^2}{4} = \frac{n}{2} \left(\frac{2n+1}{3} - \frac{n}{2} \right) = \frac{n}{2} \times \frac{n+2}{6}. \text{ D'où : } \boxed{V(Y) = \frac{n(n+2)}{12}}$$

EXERCICE 6. — Formule de Vandermonde, révision. Etablir que :

$$\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, \binom{n+m}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{m}{n-k}$$

Posons $P = (1 + X)^n$ et $Q = (1 + X)^m$.

$$\text{On a : } PQ = (1 + X)^{n+m} = \sum_{j=0}^{n+m} \binom{n+m}{j} X^j \quad (\spadesuit)$$

Par ailleurs : $P = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} X^j$ et $Q = \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} X^j$. Selon la formule donnant le produit de deux polynômes, on en déduit :

$$PQ = \sum_{j=0}^{n+m} \left(\sum_{k=0}^j \binom{n}{k} \binom{m}{j-k} \right) X^j \quad (\clubsuit)$$

$$\text{Selon } (\spadesuit) \text{ et } (\clubsuit) : \sum_{j=0}^{n+m} \binom{n+m}{j} X^j = \sum_{j=0}^{n+m} \left(\sum_{k=0}^j \binom{n}{k} \binom{m}{j-k} \right) X^j$$

En identifiant les coefficients de X^n dans ces deux expressions, on obtient : $\binom{n+m}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{m}{n-k}$.

$$\textbf{Conclusion.} \quad \forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, \binom{n+m}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{m}{n-k}$$