Mathématiques : correction d'exercices du TD 2

1. **Exercice 1 a : calculs de trois sommes**

• On rappelle le résultat de cours suivant : $a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$

On a également : $a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}$ *formule précédente appliquée à l'entier* $n+1$

Avec $a = 2$ et $b = 3$, on obtient : $2^{n+1} - 3^{n+1} = (2-3)\sum_{k=0}^{n} 2^k 3^{n-k}$, d'où $\boxed{\sum_{k=0}^{n} 2^k 3^{n-k} = 3^{n+1} - 2^{n+1}}$

Autre solution :

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k 3^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k 3^n}{3^k} = 3^n \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^k \quad \textit{on reconnaît une somme de termes consécutifs d'une suite géométrique}$$

D'où $\sum_{k=0}^{n} 2^k 3^{n-k} = 3^n \times \dfrac{1 - \frac{2^{n+1}}{3^{n+1}}}{1 - \frac{2}{3}} = 3^n \times 3 \times \left(1 - \dfrac{2^{n+1}}{3^{n+1}}\right) = 3^{n+1} - 2^{n+1}$

• $\sum_{k=0}^{n} k(k-1) = \sum_{k=0}^{n} k^2 - \sum_{k=0}^{n} k = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \dfrac{n(n+1)}{2} = \dfrac{n(n+1)}{6} \times (2n+1-3)$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} k(k-1) = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}}$$

• Calcul de la somme $S_n = \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^k k$ par deux méthodes.

Méthode 1 :

On sépare la somme en deux en regroupant les termes d'indices pairs et les termes d'indices impairs.

$$S_n = \sum_{\substack{1 \le k \le 2n+1 \\ k \text{ pair}}} (-1)^k k + \sum_{\substack{1 \le k \le 2n+1 \\ k \text{ impair}}} (-1)^k k$$

Les entiers k pairs compris entre 1 et $2n+1$ sont de la forme $k = 2i$ avec $i \in [\![1, n]\!]$.

Et les entiers k impairs compris entre 1 et $2n+1$ sont de la forme $k = 2i+1$ avec $i \in [\![0, n]\!]$.

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{2i} 2i + \sum_{i=0}^{n} (-1)^{2i+1}(2i+1) \\ &= \sum_{i=1}^{n} 2i - \sum_{i=0}^{n} (2i+1) \end{aligned}$$

Attention, on peut regrouper deux sommes uniquement si les variables des deux sommes parcourent le même ensemble de valeurs, ce qui n'est pas le cas ici.

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} 2i - \sum_{i=1}^{n} (2i+1) - 1$$

On peut désormais regrouper les deux sommes.

$$\boxed{S_n = -\sum_{i=1}^{n} 1 - 1 = -n - 1}$$

Méthode 2 :

On calcule les premières valeurs de la somme S_n afin de conjecturer un résultat qu'on prouve ensuite par récurrence.

$S_1 = -1+2-3 = -2$, $S_2 = -1+2-3+4-5 = -3$.

Soit $\mathcal{P}_n$: $S_n = -(n+1)$.

$\mathcal{P}_1$ est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose $\mathcal{P}_n$ vraie.

$$S_{n+1} = \sum_{k=1}^{2n+3} (-1)^k k = \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^k k + (2n+2) - (2n+3) = -(n+1) - 1 = -(n+2)$$

$\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

$\boxed{\text{Ainsi, d'après le principe de récurrence, pour tout entier } n \geq 1,\ S_n = -(n+1)}$

2. **Exercice 1 c : calcul d'une somme**

On commence par donner une autre écriture de l'expression $\dfrac{1}{(k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}}$:

$$\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}} = \frac{1}{(k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}} \times \frac{(k+1)\sqrt{k}-k\sqrt{k+1}}{(k+1)\sqrt{k}-k\sqrt{k+1}}$$

$$= \frac{(k+1)\sqrt{k}-k\sqrt{k+1}}{(k+1)^2k-k^2(k+1)}$$

$$= \frac{(k+1)\sqrt{k}-k\sqrt{k+1}}{k(k+1)} = \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}$$

Par conséquent, $\displaystyle\sum_{k=0}^{99} \frac{1}{(k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}} = \sum_{k=0}^{99} \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{100}}$ *somme télescopique*

$$\boxed{\text{Finalement, } \sum_{k=0}^{99} \frac{1}{(k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}} = \frac{9}{10}}$$

3. **Exercice 1d : calculs de deux produits**

$\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(4k-2) = \prod_{k=1}^{n}(2\times(2k-1)) = 2^n \prod_{k=1}^{n}(2k-1)$ et $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(2k-1) = 1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)$

produit d'entiers impairs consécutifs

Par conséquent, $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(2k-1) = \frac{1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)\times2\times4\times\cdots\times(2n)}{2\times4\times\cdots\times(2n)} = \frac{(2n)!}{2^n n!}$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \prod_{k=1}^{n}(4k-2) = \frac{(2n)!}{n!}}$$

$\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(4k^2-1) = \prod_{k=1}^{n}(2k-1) \times \prod_{k=1}^{n}(2k+1) = \frac{(2n)!}{2^n n!} \times \frac{(2n+1)!}{2^n n!}$, donc $\boxed{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(4k^2-1) = \frac{(2n)!(2n+1)!}{4^n(n!)^2}}$

4. **Exercice 8 :**

Soit $k \in [\![1, n]\!]$.

On a : $k(n+1-k) - n = n(k-1) + k(1-k)$
$= (n-k)(k-1)$
≥ 0 (*produit de deux nombres positifs*)

On a : $(\frac{n+1}{2})^2 - k(n+1-k) = \frac{1}{4}[n^2 + 2n + 1 - 4kn - 4k + 4k^2]$
$= \frac{1}{4}[(n-2k)^2 + 2(n-2k) + 1]$
$= \frac{1}{4}(n-2k+1)^2$
≥ 0

$\boxed{\text{Ainsi, } \forall k \in [\![1, n]\!],\ n \leq k(n+1-k) \leq (\frac{n+1}{2})^2}$

En multipliant terme à terme les inégalités précédentes, on obtient :

$$\prod_{k=1}^{n} n \leq \prod_{k=1}^{n} k \times \prod_{k=1}^{n} (n+1-k) \leq \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$$

Ce qui donne :

$$n^n \leq n! \times n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^{2n}$$

Par croissance de la fonction racine carrée, on obtient alors l'encadrement :

$$n^{n/2} \leq n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$

5. **Exercice 13 : calcul d'une somme double (pas facile)**

$$S_n = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \max(i,j) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i} \max(i,j) + \sum_{j=i+1}^{n} \max(i,j)\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i} i + \sum_{j=i+1}^{n} j\right)$$

On a : $\displaystyle\sum_{j=1}^{i} i = i^2$. Calculons désormais $\displaystyle\sum_{j=i+1}^{n} j$:

$$\sum_{j=i+1}^{n} j = \sum_{j=1}^{n} j - \sum_{j=1}^{i} j = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{i(i+1)}{2}.$$

On obtient : $\displaystyle S_n = \sum_{i=1}^{n}\left(i^2 + \frac{n(n+1)}{2} - \frac{i(i+1)}{2}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i^2}{2} + \frac{n(n+1)}{2} - \frac{i}{2}\right)$

On sépare en trois sommes : $\displaystyle S_n = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i^2 + \frac{n(n+1)}{2}\sum_{i=1}^{n} 1 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i$
$\displaystyle = \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} + \frac{n^2(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)}{4}$
$\displaystyle = \frac{n(n+1)[(2n+1) + 6n - 3]}{12}$

$$\boxed{\text{Ainsi, } S_n = \frac{n(n+1)(4n-1)}{6}}$$

6. **Exercice 17a :**

   On utilise une formule de duplication : $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$ et $\cos(2y) = 2\cos^2(y) - 1$,

   donc $\cos(2x) - \cos(2y) = 2(\cos^2(x) - \cos^2(y))$.

7. **Exercice 17b :**
   D'après les formules de duplication : $\cos(x) = 1 - 2\sin^2(\frac{x}{2})$, donc $1 - \cos(x) = 2\sin^2(\frac{x}{2})$.
   Et $\sin(x) = 2\sin(\frac{x}{2})\cos(\frac{x}{2})$.

   Pour $x \not\equiv 0\ [\pi]$, on a $\sin(x) \neq 0$ et on peut donc effectuer le quotient :

$$\frac{1-\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{2\sin^2(\frac{x}{2})}{2\sin(\frac{x}{2})\cos(\frac{x}{2})} = \frac{\sin(\frac{x}{2})}{\cos(\frac{x}{2})} = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

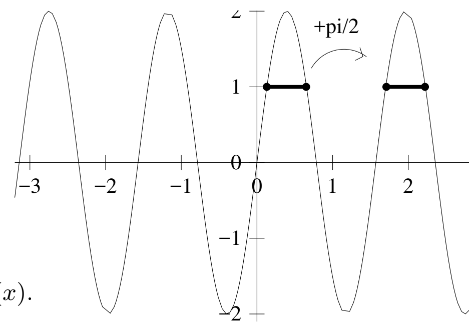
8. **Exercice 20 b :**

$$\begin{aligned}
x \text{ est solution de l'équation } &\iff 1 - \sqrt{2}\cos(x) + \cos(2x) = 0 \qquad \textit{on rappelle que } \ \cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1 \\
&\iff 2\cos^2(x) - \sqrt{2}\cos(x) = 0 \\
&\iff \cos(x) \times [2\cos(x) - \sqrt{2}] = 0 \\
&\iff \cos(x) = 0 \text{ ou } \cos(x) = \tfrac{\sqrt{2}}{2} \\
&\iff x \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi] \text{ ou } x \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi] \text{ ou } x \equiv -\frac{\pi}{4}\ [2\pi]
\end{aligned}$$

   L'ensemble S des solutions est ainsi :

$$S = \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{4} + 2k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{4} + 2k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

9. **Exercice 20 e :**
   On cherche à résoudre l'inéquation $2\sin(4x) > 1$
   On peut pour cela introduire la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2\sin(4x)$.



   On résout l'équation $f(x) = 1$:

$$\begin{aligned}
f(x) = 1 &\iff \sin(4x) = \frac{1}{2} \\
&\iff \sin(4x) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \\
&\iff 4x \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi] \text{ ou } 4x \equiv \frac{5\pi}{6}\ [2\pi] \\
&\iff x \equiv \frac{\pi}{24}\ [\tfrac{\pi}{2}] \text{ ou } x \equiv \frac{5\pi}{24}\ [\tfrac{\pi}{2}]
\end{aligned}$$

   $\forall x \in \mathbb{R}$, $f\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = 2\sin(4x + 2\pi) = 2\sin(4x) = f(x)$.
   f est $\frac{\pi}{2}$-périodique.

   Sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$, on a : $f(x) > 1 \iff x \in]\frac{\pi}{24}, \frac{5\pi}{24}[$.

   On obtient l'ensemble S des solutions de l'inéquation sur $\mathbb{R}$ en utilisant la périodicité de f :

$$S = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]\frac{\pi}{24} + k\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{24} + k\frac{\pi}{2}\right[$$