CORRECTION D'EXERCICES DU TD 3

1. <u>**Exercice 8 :** autre solution que celle vue en TD</u>

   Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ tel que $|z| \leq 1$.

   On note $Z = \dfrac{1}{1-z}$.

   On a : $\begin{aligned}[t] \mathrm{Re}(Z) &= \frac{Z+\overline{Z}}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-z} + \frac{1}{1-\overline{z}}\right) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{(1-\overline{z})+(1-z)}{(1-z)(1-\overline{z})} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{2-(z+\overline{z})}{2-(z+\overline{z})+z\,\overline{z}} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{2-2\mathrm{Re}(z)}{1-2\mathrm{Re}(z)+|z|^2} \end{aligned}$

   Montrer que $\mathrm{Re}(Z) \geq \dfrac{1}{2}$ revient alors à prouver que $\dfrac{2-2\mathrm{Re}(z)}{1-2\mathrm{Re}(z)+|z|^2} \geq 1$.

   On va montrer que le numérateur est plus grand que le dénominateur.

   On sait que $|z| \leq 1$, donc $|z|^2 \leq 1$.

   On obtient que $1-2\mathrm{Re}(z)+|z|^2 \leq 2-2\mathrm{Re}(z)$. *on a ajouté $1-2Re(z)$ à l'inégalité précédente*

   ***Attention**, établir que le numérateur est supérieur au dénominateur ne suffit pas à prouver que la fraction est supérieure à 1. Penser par exemple à l'inégalité $-2 \leq 3$: le dénominateur (ici 3) est supérieur au numérateur (ici -2), et pourtant le rapport $-\dfrac{2}{3}$ n'est pas supérieur à 1. Ceci est lié au règles opératoires sur les inégalités (qu'on reverra au chapitre 5) : lorsqu'on multiplie une inégalité par un réel c positif (resp. négatif), on ne change pas (resp. on inverse) le sens des inégalités.*

   On va montrer que $1-2\mathrm{Re}(z)+|z|^2$ est positif :
   Pour cela, on reprend l'expression factorisée de ce dénominateur (cf calcul de $Re(Z)$).
   $1-2\mathrm{Re}(z)+|z|^2 = (1-z)(1-\overline{z}) = |1-z|^2 > 0$.

   En multipliant l'inégalité $1-2\mathrm{Re}(z)+|z|^2 \leq 2-2\mathrm{Re}(z)$ par $\dfrac{1}{1-2\mathrm{Re}(z)+|z|^2}$ qui est positif, on obtient : $1 \leq \dfrac{2-2\mathrm{Re}(z)}{1-2\mathrm{Re}(z)+|z|^2}$.

   $\boxed{\text{Ainsi, } \mathrm{Re}(Z) \geq \dfrac{1}{2}}$

2. <u>**Exercice 11 :**</u>

   On suppose $e^{ix}+e^{iy}+e^{iz}=0$.
   On note $z = e^{ix}+e^{iy}+e^{iz}$.

   On a : $z=0$, donc $z^2=0$.
   Ce qui donne : $e^{2ix}+e^{2iy}+e^{2iz}+2(e^{i(x+y)}+e^{i(x+z)}+e^{i(y+z)})=0 \quad$ **(1)**.

   De plus, $\overline{z}=0$, donc $e^{-ix}+e^{-iy}+e^{-iz}=0$.
   En multipliant par $e^{i(x+y+z)}$, on obtient : $e^{i(y+z)}+e^{i(x+z)}+e^{i(x+y)}=0 \quad$ **(2)**.

   De **(1)** et **(2)**, on déduit : $e^{2ix}+e^{2iy}+e^{2iz}=0$.

3. **Exercice 12 :**

   On suppose que $|a| = |b|$.
   a et b sont non nuls, on note $a = re^{i\theta_1}$ et $b = re^{i\theta_2}$ avec $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$.
   On a alors :
   $$\frac{(a+b)^2}{ab} = \frac{r^2(e^{i\theta_1} + e^{i\theta_2})^2}{r^2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}}$$
   Or $e^{i\theta_1} + e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)/2}(e^{i(\theta_1-\theta_2)/2} + e^{i(\theta_2-\theta_1)/2}) = 2\cos(\frac{\theta_1-\theta_2}{2})e^{i(\theta_1+\theta_2)/2}$

   D'où $\quad \dfrac{(a+b)^2}{ab} = 4\cos^2\left(\dfrac{\theta_1-\theta_2}{2}\right) \in \mathbb{R}$

   La réciproque est fausse. Pour le prouver, on exhibe un contre-exemple, c'est-à-dire un couple (a, b) de nombres complexes non nuls pour lesquels $\dfrac{(a+b)^2}{ab} \in \mathbb{R}$ **et** $|a| \neq |b|$.
   $a = 1$ et $b = 2$ conviennent.

4. **Exercice 13 :**

   On a : $|u+v|^2 + |u-v|^2 = (u+v)(\overline{u+v}) + (u-v)(\overline{u-v}) = 2u\overline{u} + 2v\overline{v} = 2(|u|^2 + |v|^2)$.

   On désigne par A, B et C respectivement les points d'affixe u, $u+v$ et v.
   La quadrilatère $OABC$ est un parallélogramme (car les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{CB}$ ont pour affixe u et donc sont égaux).
   $|u+v|$ correspond à la distance OB, $|u-v|$ correspond à la distance CA (qui sont les longueurs des diagonales du parallélogramme).
   Ainsi, dans un parallélogramme, la somme des carrés des longueurs des diagonales est égale à la somme des carrés des quatre côtés.

5. **Exercice 16d :** Linéariser $\sin^4(2x)\cos^2(x)$.

   $$\sin^4(2x)\cos^2(x) = \left(\frac{e^{2ix} - e^{-2ix}}{2i}\right)^4 \times \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^2$$
   $$= \frac{1}{2^6}\left(e^{8ix} - 4e^{4ix} + 6 - 4e^{-4ix} + e^{-8ix}\right) \times \left(e^{2ix} + 2 + e^{-2ix}\right)$$

   On développe pour obtenir dans un premier temps une somme de $5 \times 3 = 15$ *termes :*

   $$\sin^4(2x)\cos^2(x) = \frac{1}{2^6}\left(e^{10ix} + 2e^{8ix} + e^{6ix} - 4e^{6ix} - 8e^{4ix} - 4e^{2ix} + 6e^{2ix} + 12 + 6e^{-2ix} - 4e^{-2ix}\right.$$
   $$\left. -8e^{-4ix} - 4e^{-6ix} + e^{-6ix} + 2e^{-8ix} + e^{-10ix}\right)$$
   $$= \frac{1}{2^6}\left(e^{10ix} + 2e^{8ix} - 3e^{6ix} - 8e^{4ix} + 2e^{2ix} + 12 + 2e^{-2ix} - 8e^{-4ix} - 3e^{-6ix} + 2e^{-8ix} + e^{-10ix}\right)$$

   On utilise enfin la formule d'Euler : $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos(\theta)$.

   $$\sin^4(2x)\cos^2(x) = \frac{\cos(10x)}{32} + \frac{\cos(8x)}{16} - \frac{3\cos(6x)}{32} - \frac{\cos(4x)}{4} + \frac{\cos(2x)}{16} + \frac{3}{16}$$

6. **Exercice 18 :**

   a) On a :
   $$\cos(5x) = \mathrm{Re}\Big(e^{5ix}\Big) = \mathrm{Re}\Big(\big(e^{ix}\big)^5\Big) = \mathrm{Re}\Big((\cos x + i\sin x)^5\Big)$$
   $$= \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}(i\sin x)^k(\cos x)^{5-k}\right)$$
   $$= \cos^5 x - 10\sin^2 x\cos^3 x + 5\sin^4 x\cos x$$

$$= \cos^5 x - 10(1-\cos^2 x)\cos^3 x + 5(1-\cos^2 x)^2 \cos x$$

$\boxed{\text{Ainsi, } \cos 5x = 16\cos^5 x - 20\cos^3 x + 5\cos x}$

b) D'après la relation précédente, on a :

$$16\cos^5 \frac{\pi}{10} - 20\cos^3 \frac{\pi}{10} + 5\cos\frac{\pi}{10} = \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

Comme $\cos \frac{\pi}{10} \neq 0$, on en déduit que

$$16\cos^4 \frac{\pi}{10} - 20\cos^2 \frac{\pi}{10} + 5 = 0$$

$\boxed{\text{Ainsi, } \cos \frac{\pi}{10} \text{ est solution de l'équation } 16x^4 - 20x^2 + 5 = 0}$

c) On note que $\cos^2 \frac{\pi}{10}$ est solution de l'équation $16x^2 - 20x + 5 = 0$.

De même, on a :

$$16\cos^5 \frac{3\pi}{10} - 20\cos^3 \frac{3\pi}{10} + 5\cos\frac{3\pi}{10} = \cos\frac{3\pi}{2} = 0$$

Comme $\cos \frac{3\pi}{10} \neq 0$, on en déduit que

$$16\cos^4 \frac{3\pi}{10} - 20\cos^2 \frac{3\pi}{10} + 5 = 0$$

Donc $\cos^2 \frac{3\pi}{10}$ est solution de l'équation $16x^2 - 20x + 5 = 0$.

Or les solutions de l'équation de $16x^2 - 20x + 5 = 0$ sont $\frac{5+\sqrt{5}}{8}$ et $\frac{5-\sqrt{5}}{8}$.

Comme $\cos \frac{\pi}{10} > \cos \frac{3\pi}{10} > 0$ (car la fonction cos est strictement décroissante sur $[0,\frac{\pi}{2}]$), alors $\cos^2 \frac{\pi}{10} > \cos^2 \frac{3\pi}{10}$ (car la fonction $x \mapsto x^2$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$)

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{on en déduit que } \cos^2 \frac{\pi}{10} = \frac{5+\sqrt{5}}{8} \\ \text{et } \cos\frac{\pi}{5} = 2\cos^2 \frac{\pi}{10} - 1 = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \end{array}}$$

7. **Exercice 19-c :**

On introduit $S'_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \sin\left(\frac{k\pi}{3}\right)$ et $V_n = S_n + iS'_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} e^{ki\pi/3}$

On a alors $\quad V_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{e^{i\pi/3}}{2}\right)^k = \frac{\frac{e^{i\pi/3}}{2} - \left(\frac{e^{i\pi/3}}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{e^{i\pi/3}}{2}}$

Multiplions alors le numérateur et le dénominateur par $1 - \dfrac{e^{-i\pi/3}}{2}$.

Calculons d'abord $\left(1 - \dfrac{e^{i\pi/3}}{2}\right) \times \left(1 - \dfrac{e^{-i\pi/3}}{2}\right) = 1 + \dfrac{1}{4} - \dfrac{e^{i\pi/3} + e^{-i\pi/3}}{2} = \dfrac{5}{4} - \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{3}{4}$

On obtient $\quad V_n = \dfrac{4}{3}\left(\dfrac{e^{i\pi/3}}{2} - \dfrac{1}{4} - \dfrac{e^{i(n+1)\pi/3}}{2^{n+1}} + \dfrac{e^{in\pi/3}}{2^{n+2}}\right)$

d'où $S_n = \mathrm{Re}(V_n) = \underbrace{\dfrac{2}{3}\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) - \dfrac{1}{3}}_{=0} - \dfrac{2\cos((n+1)\pi/3)}{3 \times 2^n} + \dfrac{\cos(n\pi/3)}{3 \times 2^n}$

Or $\quad 2\cos((n+1)\pi/3) = 2\cos(n\pi/3 + \pi/3)$

$$= 2[\cos(n\pi/3)\cos(\pi/3) - \sin(n\pi/3)\sin(\pi/3)]$$
$$= \cos(n\pi/3) - \sqrt{3}\sin(n\pi/3)$$

$$\boxed{\text{Ainsi} \quad S_n = \frac{\sin(n\pi/3)}{\sqrt{3} \times 2^n}}$$

8. **Exercice 22-a :**

   Le discriminant de cette équation du second degré vaut $\Delta = -4 = (2i)^2$.
   Les solutions de cette équation sont donc les nombres complexes :

   $$z_1 = \frac{-(2-2i) - 2i}{2i} = i \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-(2-2i) + 2i}{2i} = 2 + i$$

9. **Exercice 22-b :**

   (E) est une équation du second degré. Le discriminant vaut : $\Delta = -2i$

   Lorsqu'on connaît une forme trigonométrique de Δ, on peut obtenir une racine carrée de δ sous forme trigonométrique.

   On a : $\Delta = 2e^{3i\pi/2} = (\sqrt{2}e^{3i\pi/4})^2$

   $\delta = \sqrt{2}e^{3i\pi/4} = -1 + i$ est donc une racine carrée de Δ.

   On en déduit que les solution de l'équation sont les nombres complexes z_1 et z_2 définis par

   $$z_1 = \frac{-1 - i + 1 - i}{2} = -i \text{ et } z_2 = \frac{-1 - i - 1 + i}{2} = -1$$

10. **Exercice 22-e :**

    On calcule le discriminant Δ :

    $$\Delta = (9i+1)^2 - 8(-7+11i) = -24 - 70i$$

    On cherche une racine carrée δ de Δ sous forme alégbrique : $\delta = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

    $$\delta^2 = \Delta \iff \left\{\begin{array}{ccccc} x^2 - y^2 & = & -24 & & (1) \\ 2xy & = & -70 & & (2) \\ x^2 + y^2 & = & 74 & & (3) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccccc} 2x^2 & = & 50 & & (1') = (1) + (3) \\ 2xy & = & -70 & & (2) \\ 2y^2 & = & 98 & & (3') = (3) - (1) \end{array}\right.$$

    $$\iff \left\{\begin{array}{ccc} x & = & 5 \\ & & \\ y & = & -7 \end{array}\right. \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{array}{ccc} x & = & -5 \\ & & \\ y & = & 7 \end{array}\right.$$

    $\delta = 5 - 7i$ convient.

    L'équation admet deux solutions :

    $$z_1 = \frac{(9i+1) - (5-7i)}{4} = -1 + 4i \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{(9i+1) + (5-7i)}{4} = \frac{3}{2} + \frac{i}{2}$$

11. **Exercice 23-b : racines sixièmes d'un nombre complexe**

    On commence par écrire $-\dfrac{4}{1+i\sqrt{3}}$ sous forme trigonométrique :

    Comme $-4 = 4e^{i\pi}$ et $1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\pi/3}$, on obtient : $-\dfrac{4}{1+i\sqrt{3}} = 2e^{2i\pi/3}$.

    On résout l'équation $z^6 = 2e^{2i\pi/3}$:

    $$z^6 = 2e^{2i\pi/3} \iff z^6 = (\sqrt[6]{2}e^{i\pi/9})^6$$
    $$\iff \left(\frac{z}{\sqrt[6]{2}e^{i\pi/9}}\right)^6 = 1$$

$$\iff \frac{z}{\sqrt[6]{2}e^{i\pi/9}} = e^{ki\pi/3} \text{ avec } k \in [\![0,5]\!]$$
$$\iff z = \sqrt[6]{2}e^{i\pi/9}e^{ki\pi/3} \text{ avec } k \in [\![0,5]\!]$$
$$\iff z = \sqrt[6]{2}e^{i(3k+1)\pi/9} \text{ avec } k \in [\![0,5]\!]$$

$$\boxed{\text{Ainsi, les racines sixièmes de } -\frac{4}{1+i\sqrt{3}} \text{ sont les nombres complexes } z_k = \sqrt[6]{2}e^{i(3k+1)\pi/9} \text{ avec } k \in [\![0,5]\!]}$$

12. **Exercice 33-d :**

On note $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
|z-1| = 2|z+i| &\iff |z-1|^2 = 4|z+i|^2 \qquad \text{car les modules sont des nombres réels positifs} \\
&\iff (x-1)^2 + y^2 = 4x^2 + 4(y+1)^2 \\
&\iff 3x^2 + 2x + 3y^2 + 8y = -3 \\
&\iff x^2 + \tfrac{2}{3}x + y^2 + \tfrac{8}{3}y = -1 \\
&\iff (x+\tfrac{1}{3})^2 + (y+\tfrac{4}{3})^2 = \tfrac{8}{9} \qquad \textit{équation cartésienne d'un cercle}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{L'ensemble de points } M(z) \text{ tels que } |z-1| = 2|z+i| \text{ est donc le cercle de centre } \Omega(-\tfrac{1}{3} - \tfrac{4i}{3}) \text{ de rayon } \tfrac{2\sqrt{2}}{3}}$$

13. **Exercice 35-e :**

On suppose $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 0, 1\}$.

• Conditions sur z pour que le triangle MNP soit rectangle en N :

Le triangle est rectangle en N si et seulement si $\dfrac{z^3 - z^2}{z - z^2} \in i\mathbb{R}$

si et seulement si $\dfrac{z^2(z-1)}{z(1-z)} \in i\mathbb{R}$

si et seulement si $-z \in i\mathbb{R}$

si et seulement si $z \in i\mathbb{R}$

• Conditions sur z pour que le triangle MNP soit rectangle en P :

Le triangle est rectangle en P si et seulement si $\dfrac{z^2 - z^3}{z - z^3} \in i\mathbb{R}$

si et seulement si $\dfrac{z^2(1-z)}{z(1-z)(1+z)} \in i\mathbb{R}$

si et seulement si $\dfrac{z}{1+z} \in i\mathbb{R}$

si et seulement si $\mathrm{Re}\left(\dfrac{z}{1+z}\right) = 0$

On pose $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\frac{z}{1+z} = \frac{x+iy}{1+x+iy} \times \frac{1+x-iy}{1+x-iy} = \frac{x+x^2+y^2+iy}{(1+x)^2+y^2},$$

d'où $\mathrm{Re}\left(\dfrac{z}{1+z}\right) = \dfrac{x+x^2+y^2}{(1+x)^2+y^2}$

On en déduit :

Le triangle est rectangle en P si et seulement si $x + x^2 + y^2 = 0$

si et seulement si $(x+\frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}$

on reconnaît l'équation cartésienne du cercle de centre $\Omega(-\frac{1}{2}, 0)$ *de rayon* $\frac{1}{2}$

Le triangle est rectangle en P si et seulement si $|z + \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$.

• Il reste à déterminer les conditions sur z pour que le triangle MNP soit rectangle en M :

Cette partie est laissée en exercice. On obtient le résultat suivant :

le triangle MNP soit rectangle en M si et seulement si $\mathrm{Re}(z) = -1$

Ainsi, l'ensemble $\mathcal{S}$ des complexes tels que les 3 points forment un triangle rectangle est :

$$\boxed{\mathcal{S} = \left(\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) = -1\} \cup i\mathbb{R} \cup \{z \in \mathbb{C} \mid |z + \tfrac{1}{2}| = \tfrac{1}{2}\}\right) \setminus \{-1, 0, 1\}}$$

14. **Exercice 37 :**

a) Notons r le rayon du cercle.

Comme $\Omega M = r$, le nombre complexe $z_M - z_\Omega$ est de module r.
Il existe donc $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z_M - z_\Omega = re^{i\theta}$.

De même, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $z_A - z_\Omega = re^{i\alpha}$. Et il existe $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $z_B - z_\Omega = re^{i\beta}$.

On a : $\dfrac{z_B - z_\Omega}{z_A - z_\Omega} = \dfrac{e^{i\beta}}{e^{i\alpha}} = e^{i(\beta - \alpha)}$

On en déduit que $(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}) \equiv \beta - \alpha \quad [2\pi]$

D'autre part : $\dfrac{z_B - z_M}{z_A - z_M} = \dfrac{r(e^{i\beta} - e^{i\theta})}{r(e^{i\alpha} - e^{i\theta})}$

Comme $e^{i\beta} - e^{i\theta} = e^{i(\beta+\theta)/2}(e^{i(\beta-\theta)/2} - e^{i(\theta-\beta)/2}) = 2i\sin(\frac{\beta-\theta}{2})e^{i(\beta+\theta)/2}$,
et de même $e^{i\alpha} - e^{i\theta} = 2i\sin(\frac{\alpha-\theta}{2})e^{i(\alpha+\theta)/2}$,
on obtient :

$$\frac{z_B - z_M}{z_A - z_M} = \frac{\sin(\frac{\beta-\theta}{2})}{\sin(\frac{\alpha-\theta}{2})}e^{i(\beta-\alpha)/2}$$

On rappelle que :
- *si $z = Re^{i\theta}$ avec $R > 0$, alors $\arg(z) \equiv \theta \quad [2\pi]$*
- *si $z = Re^{i\theta}$ avec $R < 0$, alors $\arg(z) \equiv \theta + \pi \quad [2\pi]$*

Dans l'écriture précédente de $\dfrac{z_B - z_M}{z_A - z_M}$ sous la forme $Re^{i\theta}$, le signe de R dépend de la position de position des points M, A et B.
On distingue deux cas :

<u>Cas 1 :</u> si $\dfrac{\sin(\frac{\beta-\theta}{2})}{\sin(\frac{\alpha-\theta}{2})} > 0$, alors $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv \frac{\beta-\alpha}{2} \quad [2\pi]$

Ainsi, $(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}) \equiv 2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \quad [2\pi]$

<u>Cas 2 :</u> si $\dfrac{\sin(\frac{\beta-\theta}{2})}{\sin(\frac{\alpha-\theta}{2})} < 0$, alors $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv \frac{\beta-\alpha}{2} + \pi \quad [2\pi]$

Ainsi, $(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}) \equiv 2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \quad [2\pi]$

b) D'après la question précédente, $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \equiv \frac{1}{2}(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}) \quad [\pi]$ et $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) \equiv \frac{1}{2}(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}) \quad [\pi]$

15. **Exercice 38 :**

On rappelle les expressions des nombres complexes j et j^2 :

$$j = e^{\frac{2i\pi}{3}} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad j^2 = \overline{j} = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$$

1) Le trinôme $a^2 - (b+c)a + (b^2 + c^2 - bc)$ en a a un discriminant Δ égal à :

$$\Delta = (b+c)^2 - 4(b^2 + c^2 - bc) = -3(b^2 + c^2 - 2bc) = -3(b-c)^2$$

$\delta = i\sqrt{3}(b - c)$ est donc une racine carrée de Δ.

Les racines de ce trinôme en a sont donc les deux nombres complexes :

$$a_1 = \frac{(b+c) - i\sqrt{3}(b-c)}{2} = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}b + \frac{1+i\sqrt{3}}{2}c = -jb - j^2c$$

$$a_2 = \frac{(b+c) + i\sqrt{3}(b-c)}{2} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}b + \frac{1-i\sqrt{3}}{2}c = -j^2b - jc$$

On en déduit la factorisation de ce trinôme en a : $a^2 - (b+c)a + (b^2 + c^2 - bc) = (a - a_1)(a - a_2)$.

$\boxed{\text{On obtient ainsi : } a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = (a + jb + j^2c)(a + j^2b + jc)}$

2a) Le triangle ABC est équilatéral direct si et seulement si $AB = AC$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$

si et seulement si $\frac{c-a}{b-a} = e^{i\pi/3}$

si et seulement si $c - a = e^{i\pi/3}(b-a)$

si et seulement si $c + (e^{i\pi/3} - 1)a - e^{i\pi/3}b = 0$

Or $e^{i\pi/3} - 1 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2} - 1 = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2} = j$ et $-e^{i\pi/3} = \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2} = j^2$

Le triangle ABC est équilatéral direct si et seulement si $c + ja + j^2b = 0$.

si et seulement si $j^2(a + ja + j^2b) = 0$ (car $j^2 \neq 0$)

si et seulement si $a + jb + j^2c = 0$

b) Le triangle ABC est équilatéral indirect si et seulement si $AB = AC$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv -\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$

si et seulement si $\frac{c-a}{b-a} = e^{-i\pi/3}$

Par des considérations analogues que la question précédente, on obtient l'équivalence :

Le triangle ABC est équilatéral indirect si et seulement si $a + j^2b + jc = 0$.

On en déduit les équivalences suivantes :

le triangle ABC est équilatéral $\iff$ ABC est équilatéral direct ou est équilatéral indirect

$\iff a + jb + j^2c = 0$ ou $a + j^2b + jc = 0$

$\iff (a + jb + j^2c)(a + j^2b + jc) = 0$

$\iff a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$ d'après la question 1