1. **Exercice 4 :**

a) $f(0) = 1$ et $f(-1) = 1$: **l'application f n'est pas injective.**

Soit $y \in \mathbb{C}$.
L'équation $z^2 + z + 1 - y = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ est une équation du second degré, donc admet au moins une solution complexe : il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que $f(z) = y$.
Ainsi, f est surjective.

b) f est surjective, donc $\boxed{f(\mathbb{C}) = \mathbb{C}}$

Montrons que $f(\mathbb{C}^*) = \mathbb{C}$.
Il est évident que $f(\mathbb{C}^*) \subset \mathbb{C}$.
Soit $y \in \mathbb{C}$.
L'équation $z^2 + z + 1 - y = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ est une équation du second degré, donc admet au moins une solution complexe non nulle car la somme de ses racines vaut -1.
Il existe donc $z \in \mathbb{C}^*$ tel que $f(z) = y$, et ainsi $y \in f(\mathbb{C}^*)$.
On a donc montré que $\boxed{f(\mathbb{C}^*) = \mathbb{C}}$

Soit $x \in \mathbb{R}$.
On a : $f(x) = x^2 + x + 1 = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$, donc $f(x) \geq \frac{3}{4}$.
On a ainsi : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \in [\frac{3}{4}, +\infty[$.
Par conséquent $f(\mathbb{R}) \subset [\frac{3}{4}, +\infty[$.

Démontrons l'inclusion réciproque, c'est-à-dire la proposition "$\forall y \in [\frac{3}{4}, +\infty[\quad \exists x \in \mathbb{R} \quad f(x) = y$"
Soit pour cela $y \in [\frac{3}{4}, +\infty[$.
On pose $x = \sqrt{y - \frac{3}{4}} - \frac{1}{2}$.
$x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} = y - \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = y$.
Ainsi, $y \in f(\mathbb{R})$ et par conséquent $[\frac{3}{4}, +\infty[\subset f(\mathbb{R})$.

$\boxed{f(\mathbb{R}) = [\frac{3}{4}, +\infty[}$

c) Il est évident que $f^{-1}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ (*en effet, par définition,* $f^{-1}(\mathbb{C}) = \{z \in \mathbb{C} \mid f(z) \in \mathbb{C}\} = \mathbb{C}$)

Par définition, $f^{-1}(\mathbb{C}^*) = \{z \in \mathbb{C} \mid f(z) \in \mathbb{C}^*\} = \{z \in \mathbb{C} \mid f(z) \neq 0\}$.
Or $f(z) = 0 \iff z^2 + z + 1 = 0$
Les solutions de l'équation $z^2 + z + 1 = 0$ sont les nombres complexes j et j^2.
D'où : $f(z) = 0 \iff z = j$ ou $z = j^2$.

Par conséquent, $\boxed{f^{-1}(\mathbb{C}^*) = \mathbb{C} \setminus \{j, j^2\}}$

Par définition, $f^{-1}(\mathbb{R}) = \{z \in \mathbb{C} \mid f(z) \in \mathbb{R}\} = \{z \in \mathbb{C} \mid f(z) = \overline{f(z)}\}$.
Pour $z \in \mathbb{C}$, on a les équivalences suivantes :
$$\begin{aligned} f(z) = \overline{f(z)} &\iff z^2 + z + 1 = \overline{z}^2 + \overline{z} + 1 \\ &\iff z^2 - \overline{z}^2 + z - \overline{z} = 0 \\ &\iff (z - \overline{z})(z + \overline{z}) + (z - \overline{z}) = 0 \\ &\iff (z - \overline{z})(z + \overline{z} + 1) = 0 \\ &\iff z = \overline{z} \text{ ou } z + \overline{z} = -1 \\ &\iff z \in \mathbb{R} \text{ ou } 2\mathrm{Re}(z) = -1 \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Ainsi, } f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \cup \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) = -\frac{1}{2}\}}$

2. **Exercice 7 :**

a) *Il est demandé de justifier que f est bien définie. Il convient de vérifier que, pour tout élément z de $\mathbb{C} \setminus \{i\}$, $f(z)$ est bien défini (immédiat) et que $f(z)$ appartient bien à l'ensemble $\mathbb{C} \setminus \{i\}$.*

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$.
Comme $z + i \neq z - i$, alors $f(z) \neq 1$.
Ainsi, $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$, $f(z) \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$: f **est bien définie**.

Soit $y \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$.
On résout l'équation $f(z) = y$ dans l'ensemble $\mathbb{C} \setminus \{i\}$:

$$
\begin{aligned}
f(z) = y &\iff \frac{z+i}{z-i} = y \\
&\iff z + i = y(z-i) \\
&\iff z(y-1) = i(y+1) \\
&\iff z = i\frac{y+1}{y-1}
\end{aligned}
$$

Et $i\dfrac{y+1}{y-1}$ est bien un élément de $\mathbb{C} \setminus \{i\}$.
L'équation $f(z) = y$ possède une unique solution dans l'ensemble $\mathbb{C} \setminus \{i\}$.

$$\boxed{\text{Par conséquent, la fonction } f \text{ est bijective, et } f^{-1} : \mathbb{C} \setminus \{1\} \to \mathbb{C} \setminus \{i\},\ z \mapsto i\frac{z+1}{z-1}}$$

b) Soit $x \in \mathbb{R}$.
$f(x) = \dfrac{x-i}{x+i}$, donc $|f(x)| = \dfrac{|x-i|}{|x+i|} = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} = 1$.
Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$

Réciproquement, soit $y \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$.
On pose $z = f^{-1}(y) = i\dfrac{y+1}{y-1}$ de sorte que $y = f(z)$.
Montrons que $z \in \mathbb{R}$.
$\overline{z} = -i\dfrac{\overline{y}+1}{\overline{y}-1}$

Or y est un nombre complexe de module 1, donc $\overline{y} = \dfrac{1}{y}$.

D'où : $\overline{z} = -i\dfrac{\frac{1}{y}+1}{\frac{1}{y}-1} = -i\dfrac{1+y}{1-y} = i\dfrac{y+1}{y-1} = z$.
Par conséquent, $z \in \mathbb{R}$.
Ainsi, $y = f(z)$ avec $z \in \mathbb{R}$: $y \in f(\mathbb{R})$.

$$\boxed{\text{On a montré par double inclusion que } f(\mathbb{R}) = \mathbb{U} \setminus \{i\}}$$

c) Soit $z \in \mathbb{U} \setminus \{i\}$: il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = e^{i\theta}$.

$$f(z) = \frac{e^{i\theta} + e^{i\pi/2}}{e^{i\theta} - e^{i\pi/2}}$$

Or $e^{i\theta} + e^{i\pi/2} = e^{i(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})} \times (e^{i(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4})} + e^{i(-\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})}) = 2\cos\left(\dfrac{\theta}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right) e^{i(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})}$

Et $e^{i\theta} - e^{i\pi/2} = e^{i(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})} \times (e^{i(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4})} - e^{i(-\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})}) = 2i\sin\left(\dfrac{\theta}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right) e^{i(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})}$

D'où $f(z) = \dfrac{\cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{i\sin\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} = -i\dfrac{\cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}$
Par conséquent, $\forall z \in \mathbb{U} \setminus \{i\} \qquad f(z) \in i\mathbb{R}$, et ainsi $f(\mathbb{U} \setminus \{i\}) \subset i\mathbb{R}$.

- Réciproquement, considérons un nombre complexe imaginaire pur iy avec $y \in \mathbb{R}$.

On pose $z = i\dfrac{iy+1}{iy-1}$.
$z \neq i$ et $f(z) = y$ d'après (a).

$$|z| = |i| \times \frac{|iy+1|}{|iy-1|} = \frac{\sqrt{y^2+1}}{\sqrt{y^2+1}} = 1$$

Ainsi, $iy \in f(\mathbb{U} \setminus \{i\})$.

$$\boxed{\text{On a donc montré que } f(\mathbb{U} \setminus \{i\}) = i\mathbb{R}}$$

3. **Exercice 9 :**

   a) $\Gamma(E) = (A, B)$ et $\Gamma(A \cup B) = (A, B)$.
   Supposons Γ injective.
   Comme $\Gamma(E) = \Gamma(A \cup B)$, on déduit de l'injectivité de Γ que $E = A \cup B$.
   Ainsi, Γ injective $\Longrightarrow A \cup B = E$.

   La condition $A \cup B = E$ est donc une condition nécessaire pour que Γ soit injective.

   b) Supposons $A \cup B = E$.
   Soient X et X' deux parties de E tels que $\Gamma(X) = \Gamma(X')$.
   Alors $X \cap A = X' \cap A$ et $X \cap B = X' \cap B$.
   On a : $X = X \cap E = X \cap (A \cup B) = (X \cap A) \cup (X \cap B) = (X' \cap A) \cup (X' \cap B) = X' \cap (A \cup B) = X' \cap E = X'$
   Γ est injective.

   c) Supposons Γ surjective.
   Le couple $(A, \emptyset)$ est un élément de $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$, donc admet un antécédent X par l'application Γ : $\Gamma(X) = (A, \emptyset)$.
   Ce qui donne $X \cap A = A$ et $X \cap B = \emptyset$.
   On a : $A \cap B = (X \cap A) \cap B = A \cap (X \cap B) = A \cap \emptyset = \emptyset$.

   Supposons $A \cap B = \emptyset$.
   Soit (A', B') un élément de $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$.
   On pose $X = A' \cup B'$.
   Alors X est un élément de $\mathcal{P}(E)$ et on vérifie que $\Gamma(X) = (X \cap A, X \cap B) = (A', B')$ (calcul à détailler...)
   Γ est surjective.

   d) e) Γ est bijective $\Longleftrightarrow A \cap B = \emptyset$ et $A \cup B = E$.

   Dans ce cas, $\Gamma^{-1} : \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \longrightarrow \mathcal{P}(E)$, $(X, Y) \longmapsto X \cup Y$.

4. **Exercice 12 :**

   Supposons f injective et montrons f surjective :
   Soit pour cela $y \in E$. On a $f(f(f(y))) = y$.
   Comme f est injective, on en déduit que $f(f(y)) = y$.
   En posant $x = f(y)$, on a bien $f(x) = f(f(y)) = y$. Ainsi, f est surjective.

   Supposons f surjective et montrons f injective :
   Soient x, x' deux éléments de E tels que $f(x) = f(x')$.
   f est surjective : il existe $t \in E$ tel que $f(t) = x$ et il existe $t' \in E$ tel que $f(t') = x'$.
   On obtient alors $f(f(t)) = f(f(t'))$ puis (en appliquant f) $f(f(f(t))) = f(f(f(t')))$.
   Comme $f \circ f \circ f = f$, on en déduit que $f(t) = f(t')$, c'est-à-dire $x = x'$. f est injective.

   $\boxed{\text{Ainsi, } f \text{ injective} \Longleftrightarrow f \text{ surjective}}$

5. **Exercice 16 :**

   c) Soient A et B deux parties de E.
   Soit $y \in f(A \cap B)$: il existe donc $x \in A \cap B$ tel que $f(x) = y$.
   Comme $x \in A$ et $y = f(x)$, alors $y \in f(A)$. Comme $x \in B$ et $y = f(x)$, alors $y \in f(B)$.
   Ainsi, $y \in f(A) \cap f(B)$.

   d) Supposons f injective. Soient A et B deux parties de E.
   D'après c, on a $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. Il reste à montrer $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$.
   Soit $y \in f(A) \cap f(B)$.
   $y \in f(A)$: il existe donc $x_1 \in A$ tel que $f(x_1) = y$.
   $y \in f(B)$: il existe $x_2 \in B$ tel que $f(x_2) = y$.
   $f(x_1) = f(x_2)$ et f est injective. Par conséquent, $x_1 = x_2$.
   On obtient alors que $x_1 \in B$. Ainsi, $y = f(x_1)$ et $x_1 \in A \cap B$, c'est-à-dire $y \in f(A \cap B)$.
   On a montré que si f est injective, alors pour toutes parties A et B de E, on a $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

   Supposons que pour toutes parties A et B de E, $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$, et montrons que f est injective.
   Soit $(x_1, x_2) \in E^2$ tel que $f(x_1) = f(x_2)$.
   On pose $A = \{x_1\}$ et $B = \{x_2\}$. Alors $f(A) = \{f(x_1)\}$ et $f(B) = \{f(x_2)\} = f(A)$ (car $f(x_1) = f(x_2)$).
   $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ est donc non vide.
   On en déduit que $A \cap B$ est non vide, (car $f(\emptyset) = \emptyset$).
   Par conséquent, $x_1 = x_2$ (car si $x_1 \neq x_2$, on aurait $A \cap B = \emptyset$). f **est injective**.

6. **Exercice 23 :**

   (a) $f'(x) = \dfrac{4x^3 + 2x}{x^4 + x^2 + 1}$

   (b) $f'(x) = 7x^6\, e^{5x^2} + x^7\, e^{5x^2} \times 10x = x^6\, e^{5x^2} \left(7 + 10x^2\right)$

   (c) $f'(x) = \dfrac{3e^{3x}(5x^2+1) - 10x\, e^{3x}}{(5x^2+1)^2} = \dfrac{e^{3x}\left(15x^2 - 10x + 3\right)}{(5x^2+1)^2}$

   (e) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{e^x + x^2}} \times (e^x + 2x)$

   (g) $f'(x) = \dfrac{-\sin(x)(\sin(x)+2) - \cos^2(x)}{(\sin(x)+2)^2} = -\dfrac{\sin^2(x) + 2\sin(x) + \cos^2(x)}{(\sin(x)+2)^2} = -\dfrac{1 + 2\sin(x)}{(\sin(x)+2)^2}$

   (h) $f'(x) = -\sin\left(\dfrac{1}{x^2+1}\right) \times \dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}$

   (i) $f'(x) = \dfrac{3e^{3x} - 3e^{-x}}{e^{3x} + 3e^{-x}}$

   (k) $f'(x) = \dfrac{-3\cos(3x)}{2 - \sin(3x)}$

   (l) $f'(x) = \dfrac{3x^2 \ln(x^2+2) - \dfrac{2x}{x^2+2}x^3}{\ln^2(x^2+2)} = \dfrac{3x^2(x^2+2)\ln(x^2+2) - 2x^4}{(x^2+2)\ln^2(x^2+2)}$

7. **Fin de l'exercice 34 :**

   Montrons que $B = \{z \in \mathbb{C}\,|1 + i \preceq z\}$ (par double inclusion).

   Soit $z \in B$.
   z est un majorant de A : $\forall a \in A \quad a \preceq z$.
   Or $a = 1$ appartient à A, donc $1 \preceq z$, par conséquent, $1 \leq \mathrm{Re}(z)$.
   Et $a = i$ appartient à A, donc $i \preceq z$, par conséquent, $1 \leq \mathrm{Im}(z)$.
   Ainsi $1 + i \preceq z$. On a donc montré que $B \subset \{z \in \mathbb{C}\,|1 + i \preceq z\}$.

   Réciproquement, soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $1 + i \preceq z$.
   Montrons que z est un majorant de A, c'est-à-dire $\forall a \in A \quad a \preceq z$.
   Soit $a \in A$. On sait que $\mathrm{Re}(a) \leq |a|$ et $|a| \leq 1$, donc $\mathrm{Re}(a) \leq 1$.
   De même, $\mathrm{Im}(a) \leq |a|$. Par conséquent $\mathrm{Im}(a) \leq 1$.
   On en déduit que $a \preceq 1 + i$. Par transitivité, on obtient que $a \preceq z$.
   On a donc montré que $\{z \in \mathbb{C}\,|1 + i \preceq z\} \subset B$.

   A et B sont disjoints : A n'admet donc pas de plus grand élément.
   Il est immédiat que $\min(B) = 1 + i$.

8. **Exercice 36 :**

   a) Supposons $0 \preceq z$.
   La relation $\preceq$ est compatible avec l'addition, alors $0 + (-z) \preceq z + (-z)$, et donc $-z \preceq 0$.

   Supposons $-z \preceq 0$.
   Alors $(-z) + z \preceq 0 + z$ (compatibilité de $\preceq$ avec l'addition), et donc $0 \preceq z$.

   $\boxed{\text{Ainsi, } 0 \preceq z \iff -z \preceq 0}$

   b) Soit $z \in \mathbb{C}$.
   Comme la relation $\preceq$ est totale, les éléments z et 0 sont comparables, donc $0 \preceq z$ ou $z \preceq 0$.

   Supposons $0 \preceq z$ **:** alors $0 \times z \preceq z \times z$ (compatibilité de $\preceq$ avec la multiplication) et donc $0 \preceq z^2$.

   Supposons $z \preceq 0$ **:** alors $0 \preceq -z$ et donc $0 \times (-z) \preceq (-z) \times (-z)$ (compatibilité de $\preceq$ avec la multiplication) et donc $0 \preceq z^2$.

   $\boxed{\text{Ainsi, } \forall z \in \mathbb{C} \quad 0 \preceq z^2}$

   c) D'après la question b, on a $0 \preceq i^2$, donc $0 \preceq -1$ et alors $1 \preceq 0$.
   Or $0 \preceq 1^2$, donc $0 \preceq 1$.
   Comme la relation $\preceq$ est antisymétrique, on en déduit que $0 = 1$. **Contradiction**