1. **Exercice 1 :**
On a : $2 \leq a \leq 4$, donc $4 \leq a^2 \leq 16$ par croissance de la fonction $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}_+$.
Comme $1 \leq b \leq 3$, on obtient $5 \leq a^2 + b \leq 19$ (1).
$2 \leq -c \leq 5$, donc $\dfrac{1}{5} \leq -\dfrac{1}{c} \leq \dfrac{1}{2}$ (2) par décroissance de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
En multipliant (1) et (2), on obtient $1 \leq -\dfrac{a^2+b}{c} \leq \dfrac{19}{2}$, puis $\boxed{-\dfrac{19}{2} \leq \dfrac{a^2+b}{c} \leq -1}$

---

2. **Exercice 2 : questions 2, 3 et 4**

2. On propose deux démonstrations pour établir cette inégalité.

Démonstration 1 : Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On distingue 4 cas suivant les signes de x et y.

• **Cas 1 : on suppose x et y positifs :**
$|x| + |y| = x + y = |x + y| \leq |x + y| + |x - y|$, car $|x - y| \geq 0$.

• **Cas 2 : on suppose x positif et y négatif :**
$|x| + |y| = x - y = |x - y| \leq |x + y| + |x - y|$, car $|x + y| \geq 0$.

• **Cas 3 : on suppose x négatif et y positif :**
$|x| + |y| = -(x - y) = |x - y| \leq |x + y| + |x - y|$, car $|x + y| \geq 0$.

• **Cas 4 : on suppose x et y négatifs :**
$|x| + |y| = -(x + y) = |x + y| \leq |x + y| + |x - y|$, car $|x - y| \geq 0$.

Dans tous les cas, $\boxed{\text{on a } |x| + |y| \leq |x + y| + |x - y|}$

Démonstration 2 :
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
On a : $x = \dfrac{x+y}{2} + \dfrac{x-y}{2}$,
D'où $|x| = \left|\dfrac{x+y}{2} + \dfrac{x-y}{2}\right| \leq \left|\dfrac{x+y}{2}\right| + \left|\dfrac{x-y}{2}\right|$ (d'après l'inégalité triangulaire)
Ainsi, $|x| \leq \dfrac{|x+y|}{2} + \dfrac{|x-y|}{2}$ (1).
De même, $y = \dfrac{x+y}{2} - \dfrac{x-y}{2}$,
D'où $|y| = \left|\dfrac{x+y}{2} - \dfrac{x-y}{2}\right| \leq \left|\dfrac{x+y}{2}\right| + \left|\dfrac{x-y}{2}\right|$ (d'après l'inégalité triangulaire)
Ainsi, $|y| \leq \dfrac{|x+y|}{2} + \dfrac{|x-y|}{2}$ (2).
En sommant les inégalités (1) et (2), $\boxed{\text{on obtient } |x| + |y| \leq |x + y| + |x - y|}$

3. Soit $a \in \mathbb{R}_+$ et $b \in \mathbb{R}_+$.
Comme $\sqrt{a+b} \geq 0$ et $\sqrt{a} + \sqrt{b} \geq 0$, il suffit de comparer leurs carrés.
$(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 - (\sqrt{a+b})^2 = a + 2\sqrt{ab} + b - (a + b) = 2\sqrt{ab} \geq 0$.
Ainsi, $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \geq (\sqrt{a+b})^2$.
$\boxed{\text{Par conséquent, } \sqrt{a} + \sqrt{b} \geq \sqrt{a+b}}$

4. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
D'après l'inégalité triangulaire, $|x| = |(x - y) + y| \leq |x - y| + |y|$.
Par croissance de la fonction racine carrée, on obtient $\sqrt{|x|} \leq \sqrt{|x-y| + |y|}$.
On applique l'inégalité précédente à $a = |x-y|$ et $b = |y|$, ce qui donne : $\sqrt{|x-y| + |y|} \leq \sqrt{|x-y|} + \sqrt{|y|}$.
On en déduit : $\sqrt{|x|} \leq \sqrt{|x-y|} + \sqrt{|y|}$, et donc $\boxed{\sqrt{|x|} - \sqrt{|y|} \leq \sqrt{|x-y|}}$

---

3. **Exercice 9 :**

a) Pour $x \in]1, +\infty[$, on a : $\sin(x) \leq 1 < x$.

Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par $f(x) = x - \sin(x)$.
f est dérivable et $f'(x) = 1 - \cos(x)$.
$f'(0) = 0$ et $\forall x \in]0,1] \quad f'(x) > 0$.
La fonction f est donc strictement croissante sur $[0,1]$.
Par conséquent, $\forall x \in]0,1] \quad f(x) > f(0) = 0$.

$\boxed{\text{Ainsi, } \forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad \sin(x) < x}$

b) Soit $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$.

Comme $\cos x \in]0,1]$, alors d'après le résultat précédent, $\sin(\cos x) < \cos x$.

De plus, $\sin x \leq x$ (*il peut y avoir égalité car $x = 0$ n'est pas exclu*).
La fonction cos est décroissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, donc $\cos(\sin x) \geq \cos x$.

$\boxed{\text{On en déduit que } \sin(\cos x) < \cos(\sin x)}$

c) On définit la fonction F sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R} \qquad F(x) = \cos(\sin x) - \sin(\cos x)$.
D'après ce qui précède, $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[$, $F(x) > 0$.

Pour $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$, on a $\sin(x) \in [0,1]$, donc $\cos(\sin x) > 0$.
Et $\cos x \in [-1, 0]$, donc $-\sin(\cos x) \geq 0$.
Par conséquent, $\forall x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$, $F(x) > 0$.

De plus, la fonction F est paire.
On en déduit que $\forall x \in [-\pi, \pi]$, $F(x) > 0$.

La fonction F est 2π-périodique.

$\boxed{\text{Ainsi, } \forall x \in \mathbb{R} \quad F(x) > 0}$

---

4. **Exercice 10 :**

On suppose que $a \leq b$. On montre que la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \frac{\ln(1+ax)}{\ln(1+bx)}$ est croissante.

f est dérivable et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$
$$f'(x) = \frac{1}{\ln^2(1+bx)} \times \left[\frac{a\ln(1+bx)}{1+ax} - \frac{b\ln(1+bx)}{1+bx}\right]$$
$$= \frac{a(1+bx)\ln(1+bx) - b(1+ax)\ln(1+ax)}{\ln^2(1+bx)(1+ax)(1+bx)}$$

On a utilisé ici la formule de la dérivée d'un quotient : $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Le dénominateur $\ln^2(1+bx)(1+ax)(1+bx)$ est positif.
Le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $g(x) = a(1+bx)\ln(1+bx) - b(1+ax)\ln(1+ax)$.
g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \qquad g'(x) = ab\ln(1+bx) + ab - ab\ln(1+ax) - ab = ab[\ln(1+bx) - \ln(1+ax)]$$

Or $1 + bx \geq 1 + ax$, donc $\ln(1+bx) \geq \ln(1+ax)$ (car la fonction ln est croissante).
Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad g'(x) \geq 0$.
La fonction g est croissante.
De plus, $g(0) = 0$.
Donc, $\forall x \in \mathbb{R}_+ \qquad g(x) \geq 0$.
Par conséquent, $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad f'(x) \geq 0$.

Ainsi, la fonction f est croissante.
Comme $\frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$, on obtient : $f\left(\frac{1}{b}\right) \leq f\left(\frac{1}{a}\right)$

Ce qui donne $\dfrac{\ln(1+\frac{a}{b})}{\ln(2)} \leq \dfrac{\ln(2)}{\ln(1+\frac{b}{a})}$, et donc $\ln\left(1+\dfrac{a}{b}\right)\ \ln\left(1+\dfrac{b}{a}\right) \leq (\ln 2)^2$

a et b jouent des rôles symétriques : si $b \leq a$, alors $\ln\left(1+\frac{b}{a}\right)\ \ln\left(1+\frac{a}{b}\right) \leq (\ln 2)^2$.

Remarque : lorsque $b \leq a$, la fonction f est décroissante.

---

5. **<u>Exercice 23 :</u>**

a) $14\sqrt{2}$ est le produit d'un rationnel non nul et d'un irrationnel, donc est irrationnel.
Par conséquent, α est la somme d'un nombre rationnel et d'un irrationnel, donc est irrationnel.
Les mêmes arguments prouvent que β est également un nombre irrationnel.

b) $\alpha\beta = 20^2 - 2 \times 14^2 = 8$, donc $\sqrt[3]{\alpha\beta} = 2$.

c) D'après la formule du binôme, on a :

$$x^3 = (\sqrt[3]{\alpha})^3 + 3(\sqrt[3]{\alpha})^2\sqrt[3]{\beta} + 3\sqrt[3]{\alpha}(\sqrt[3]{\beta})^2 + (\sqrt[3]{\beta})^3 = \alpha + 3\sqrt[3]{\alpha\beta}\sqrt[3]{\alpha} + 3\sqrt[3]{\alpha\beta}\sqrt[3]{\beta} + \beta$$

$$x^3 = \alpha + 6\sqrt[3]{\alpha} + 6\sqrt[3]{\beta} + \beta$$

On obtient $x^3 = 40 + 6x$, ou encore $x^3 - 6x - 40 = 0$.

On constate que $x = 4$ vérifie la relation précédente, on va donc chercher à factoriser l'expression $x^3 - 6x - 40$ par $(x-4)$, cela revient à trouver des valeurs a et b telles que $x^3 - 6x - 40 = (x-4)(x^2+ax+b)$.

Or $x^3 - 6x - 40 = (x-4)(x^2+4x-10)$.
Comme le discriminant du trinôme $x^2+4x-10$ est strictement négatif, alors $x^2+4x-10 \neq 0$.

$\boxed{\text{Ainsi, } x = 4 \text{ et donc } x \text{ est rationnel}}$

---

6. **Exercice 31 b :**

On propose ici 4 résolutions différentes de cette équation : les deux premières ont recours à un raisonnement par analyse-synthèse et les deux dernières à un raisonnement par équivalences.

Les deux premières résolutions présentent de nombreux points communs.

*Dans la première résolution proposée, l'**analyse** a été menée à son terme, la **synthèse** consiste alors à établir l'**implication réciproque**, c'est-à-dire à justifier que les valeurs décelées à la fin de l'analyse sont effectivement solutions de l'équation.*

*Dans la seconde résolution proposée, l'**analyse** n'est pas achevée, on pourrait obtenir en poussant le raisonnement d'autres conditions nécessaires sur les solutions de l'équation. Toutefois, les conditions trouvées ont permis de **localiser les éventuelles solutions**, et on peut alors examiner lors de la synthèse quelles sont parmi les valeurs trouvées celles qui sont effectivement solutions de l'équation et celles qui ne le sont pas.*

On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de l'équation.

<u>RÉSOLUTION 1 :</u>

- $\lfloor 2x+3 \rfloor = \lfloor x-1 \rfloor \iff \lfloor 2x \rfloor + 3 = \lfloor x \rfloor - 1$
  $\iff \lfloor 2x \rfloor = \lfloor x \rfloor - 4$

- **Analyse : supposons x solution**

On a : $2x - 1 < \lfloor 2x \rfloor \leq 2x$ et $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$.
D'où : $-x \leq -\lfloor x \rfloor < -x + 1$
Puis (en sommant les inégalités) : $x - 1 < \lfloor 2x \rfloor - \lfloor x \rfloor < x + 1$.

Or $\lfloor 2x \rfloor - \lfloor x \rfloor = -4$.
Par conséquent, on obtient d'une part : $x - 1 < -4$, donc $x < -3$.
Et d'autre part : $x + 1 > -4$, donc $x > -5$.
Ainsi, $x \in]-5, -3[$.

On en déduit que $\lfloor x \rfloor = -5$ ou $\lfloor x \rfloor = -4$.

<u>Cas 1 : on suppose $\lfloor x \rfloor = -5$:</u>

Alors $\lfloor 2x \rfloor = \lfloor x \rfloor - 4 = -9$.
Comme $\lfloor 2x \rfloor \leq 2x < \lfloor 2x \rfloor + 1$, alors $-9 \leq 2x < -8$, et ainsi $-\frac{9}{2} \leq x < -4$.

<u>Cas 2 : on suppose $\lfloor x \rfloor = -4$:</u>

Alors $\lfloor 2x \rfloor = -8$.
Comme $-8 \leq 2x < -7$, alors $-4 \leq x < -\frac{7}{2}$.

Dans les deux cas, on obtient que $x \in [-\frac{9}{2}, -\frac{7}{2}[$.

Ainsi, $\mathcal{S} \subset [-\frac{9}{2}, -\frac{7}{2}[$.

On a effectivement montré l'implication : $x \in \mathcal{S} \Longrightarrow x \in [-\frac{9}{2}, -\frac{7}{2}[$.

• **Synthèse : supposons $x \in [-\frac{9}{2}, -\frac{7}{2}[$ et montrons que x est solution de l'équation**

On distingue deux cas :
— Si $x \in [-\frac{9}{2}, -4[$, alors $2x \in [-9, -8[$, donc $\lfloor x \rfloor = -5$ et $\lfloor 2x \rfloor = -9$.
Par conséquent, $\lfloor 2x \rfloor = \lfloor x \rfloor - 4$.

— Si $x \in [-4, -\frac{7}{2}[$, alors $2x \in [-8, -7[$, donc $\lfloor x \rfloor = -4$ et $\lfloor 2x \rfloor = -8$.
Par conséquent, $\lfloor 2x \rfloor = \lfloor x \rfloor - 4$.

Dans les deux cas, x est bien solution de l'équation.
On a donc montré $[-\frac{9}{2}, -\frac{7}{2}[\subset \mathcal{S}$.

• $\boxed{\textbf{Conclusion : } \mathcal{S} = [-\frac{9}{2}, -\frac{7}{2}[}$

<u>RÉSOLUTION 2 :</u>

• $\lfloor 2x+3 \rfloor = \lfloor x-1 \rfloor \Longleftrightarrow \lfloor 2x \rfloor + 3 = \lfloor x \rfloor - 1$
$\Longleftrightarrow \lfloor 2x \rfloor = \lfloor x \rfloor - 4$

• **Analyse : supposons x solution**

On a : $2x - 1 < \lfloor 2x \rfloor \leq 2x$ et $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$.
D'où : $-x \leq -\lfloor x \rfloor < -x + 1$
Puis (en sommant les inégalités) : $x - 1 < \lfloor 2x \rfloor - \lfloor x \rfloor < x + 1$.

Or $\lfloor 2x \rfloor - \lfloor x \rfloor = -4$.
Par conséquent, on obtient d'une part : $x - 1 < -4$, donc $x < -3$.
Et d'autre part : $x + 1 > -4$, donc $x > -5$.
Ainsi, $x \in]-5, -3[$.

On arrête ici la recherche de conditions nécessaires (on peut en trouver d'autres : cf résolution 1). L'analyse qu'on a conduite a permis de localiser les solutions éventuelles dans l'intervalle $]-5, -3[$, *on va alors examiner au cours de la synthèse quelles sont parmi ces valeurs celles qui sont solutions de l'équation.*

• **Synthèse : supposons $x \in]-5, -3[$**

On distingue plusieurs cas :
— Si $x \in]-5, -\frac{9}{2}[$, alors $2x \in]-10, -9[$, donc $\lfloor x \rfloor = -5$ et $\lfloor 2x \rfloor = -10$.
Par conséquent, $\lfloor 2x \rfloor \neq \lfloor x \rfloor - 4$: x n'est donc pas solution de l'équation.

— Si $x \in [-\frac{9}{2}, -4[$, alors $2x \in [-9, -8[$, donc $\lfloor x \rfloor = -5$ et $\lfloor 2x \rfloor = -9$.
Par conséquent, $\lfloor 2x \rfloor = \lfloor x \rfloor - 4$: x est donc solution de l'équation.

— Si $x \in [-4, -\frac{7}{2}[$, alors $2x \in [-8, -7[$, donc $\lfloor x \rfloor = -4$ et $\lfloor 2x \rfloor = -8$.
Par conséquent, $\lfloor 2x \rfloor = \lfloor x \rfloor - 4$.

— Si $x \in [-\frac{7}{2}, -3[$, alors $2x \in [-7, -6[$, donc $\lfloor x \rfloor = -4$ et $\lfloor 2x \rfloor = -7$.
Par conséquent, $\lfloor 2x \rfloor \neq \lfloor x \rfloor - 4$: x n'est donc pas solution de l'équation.

La synthèse prouve que les nombres réels de l'intervalle $]-5, -3[$ *qui sont solutions de l'équation sont les nombres réels de l'intervalle* $[-\frac{9}{2}, -\frac{7}{2}[$.

• $\boxed{\textbf{Conclusion : } \text{on en déduit que } \mathcal{S} = [-\frac{9}{2}, -\frac{7}{2}[}$

<u>RÉSOLUTION 3 :</u> (*utilisation d'une relation remarquable sur la partie entière*)

• **Montrons dans un premier temps que $\lfloor 2x \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor$:**

Cette relation n'est autre que la relation établie lors de l'exercice 25b appliquée au point $2x$. On propose une autre preuve de ce résultat :

On note $n = \lfloor x \rfloor$.

On distingue deux cas :
— Si $x \in [n, n + \frac{1}{2}[$, alors $x + \frac{1}{2} \in [n + \frac{1}{2}, n + 1[$ et $2x \in [2n, 2n+1[$.
On en déduit que $\lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor = n$ et $\lfloor 2x \rfloor = 2n$.
Par conséquent, $\lfloor 2x \rfloor = 2n = \lfloor x \rfloor + \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor$.

— Si $x \in [n + \frac{1}{2}, n + 1[$, alors $x + \frac{1}{2} \in [n + 1, n + \frac{3}{2}[$ et $2x \in [2n+1, 2n+2[$.
On en déduit que $\lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor = n + 1$ et $\lfloor 2x \rfloor = 2n + 1$.
Par conséquent, $\lfloor 2x \rfloor = 2n + 1 = \lfloor x \rfloor + \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor$.

On a donc prouvé que $\lfloor 2x \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor$.

• **Résolution de l'équation par équivalence :**

$$\begin{array}{rcl} \lfloor 2x+3 \rfloor = \lfloor x-1 \rfloor & \iff & \lfloor 2x \rfloor + 3 = \lfloor x \rfloor - 1 \\ & \iff & \lfloor 2x \rfloor = \lfloor x \rfloor - 4 \\ & \iff & \lfloor x \rfloor + \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor = \lfloor x \rfloor - 4 \\ & \iff & \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor = -4 \\ & \iff & -4 \leq x + \frac{1}{2} < -3 \\ & \iff & -\frac{9}{2} \leq x < -\frac{7}{2} \end{array}$$

$\boxed{\text{Ainsi, l'ensemble des solutions est } \mathcal{S} = [-\frac{9}{2}, -\frac{7}{2}[}$

<u>RÉSOLUTION 4 :</u> *(introduction d'une variable auxiliaire)*

L'équation $\lfloor 2x+3 \rfloor = \lfloor x-1 \rfloor$ est équivalente à $\lfloor 2x \rfloor = \lfloor x \rfloor - 4$.

On note $r = x - \lfloor x \rfloor$ la partie fractionnaire de x : $r \in [0, 1[$.

On a : $2x = 2\lfloor x \rfloor + 2r$.

Donc $\lfloor 2x \rfloor = \begin{cases} 2\lfloor x \rfloor & \text{si } r \in [0, \frac{1}{2}[\\ 2\lfloor x \rfloor + 1 & \text{si } r \in [\frac{1}{2}, 1[\end{cases}$

On en déduit les équivalences suivantes :

$$\lfloor 2x \rfloor = \lfloor x \rfloor - 4 \iff \begin{cases} 0 \leq r < \frac{1}{2} \\ 2\lfloor x \rfloor = \lfloor x \rfloor - 4 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \frac{1}{2} \leq r < 1 \\ 2\lfloor x \rfloor + 1 = \lfloor x \rfloor - 4 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 0 \leq x - \lfloor x \rfloor < \frac{1}{2} \\ \lfloor x \rfloor = -4 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \frac{1}{2} \leq x - \lfloor x \rfloor < 1 \\ \lfloor x \rfloor = -5 \end{cases}$$

$$\iff -4 \leq x < -\frac{7}{2} \text{ ou } -\frac{9}{2} \leq x < -4$$

$$\iff x \in [-\frac{9}{2}, -4[\cup[-4, -\frac{7}{2}[$$

$$\iff x \in [-\frac{9}{2}, -\frac{7}{2}[$$

$\boxed{\text{Ainsi, l'ensemble des solutions est } \mathcal{S} = [-\frac{9}{2}, -\frac{7}{2}[}$

---

7. **Exercice 32 :**

Point méthode :
Pour déterminer la partie entière de x, on cherche à encadrer x entre deux entiers consécutifs. Plus précisément :

$$\boxed{\text{si } k \in \mathbb{Z} \text{ et } x \in [k, k+1[, \text{ alors } \lfloor x \rfloor = k}$$

Pour établir que $\lfloor \sqrt{n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 1} \rfloor = n^2 + n$, il suffit de montrer que :

$$n^2 + n \leq \sqrt{n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 1} < n^2 + n + 1$$

Démonstration :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
$(n^2 + n)^2 = n^4 + 2n^3 + n^2 < n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 1$.
Et $(n^2 + n + 1)^2 = n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 2n + 1 > n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 1$.

Par conséquent, $(n^2 + n)^2 < n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 1 < (n^2 + n + 1)^2$.

La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ étant strictement croissante, on déduit : $n^2 + n < \sqrt{n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 1} < n^2 + n + 1$.

Comme $n^2 + n \in \mathbb{N}$, on a ainsi : $\boxed{\lfloor \sqrt{n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 1} \rfloor = n^2 + n}$

D'après ce qui précède, $\lfloor \sqrt{n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 1} \rfloor \neq \sqrt{n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 1}$.
$\sqrt{n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 1}$ n'est donc pas un entier, $n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 1$ n'est ainsi pas un carré parfait.

---

8. **Exercice 33 :**

L'écriture décimale de n comporte N chiffres, donc $10^{N-1} \leq n < 10^N$.
La fonction ln étant strictement croissante, on obtient $(N-1)\ln(10) \leq \ln(n) < N \ln(10)$.

En multipliant par $\frac{1}{\ln(10)}$, on déduit : $(N-1) \leq \frac{\ln(n)}{\ln(10)} < N$.

Par conséquent, $\left\lfloor \frac{\ln(n)}{\ln(10)} \right\rfloor = N-1$

---

9. **Exercice 41 :**

a) Comme $f(0) \in [0,1]$, alors $f(0) \geq 0$: $0 \in A$.
A est majorée par 1.
A est donc une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$, donc admet une borne supérieure.

b) Soit $x \in A$.
$x \leq a$, et comme f est croissante, on obtient $f(x) \leq f(a)$.
Or $x \leq f(x)$, d'où $x \leq f(a)$.
Par conséquent, $\forall x \in A$, $x \leq f(a)$.
$f(a)$ est donc un majorant de A : on en déduit que $f(a) \geq a$ (*a est le plus petit des majorants*)
f étant croissante, on obtient ensuite $f(f(a)) \geq f(a)$.
Ce qui signifie que $f(a)$ est un élément de A.
a étant un majorant de A, on obtient finalement $f(a) \leq a$.

$\boxed{\text{Ainsi, } f(a) = a}$
