1. **Exercice 9 :**

   f est dérivable et $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 1 + 6x^2 + 15x^4 > 0$.
   f est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}$, donc réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\left]\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right[= \mathbb{R}$.

   Ainsi, f est bijective.

   De plus, f est dérivable et sa dérivée ne s'annule pas.
   Par conséquent, f^{-1} est dérivable et

   $$\forall x \in \mathbb{R} \quad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

   Comme $f(0) = 0$, alors $f^{-1}(0) = 0$, d'où $(f^{-1})'(0) = \dfrac{1}{f'(0)} = 1$.

   Comme $f(1) = 6$, alors $f^{-1}(6) = 1$, d'où $(f^{-1})'(6) = \dfrac{1}{f'(1)} = \dfrac{1}{22}$.

---

2. **Exercice 11 :**

   f est la composée de deux fonctions strictement croissantes, donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
   De plus, f est continue sur $\mathbb{R}$.
   Par conséquent, f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\left]\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right[=]0, +\infty[$.

   Soit $y \in]0, +\infty[$ et soit $x \in \mathbb{R}$.

   $$\begin{aligned} f(x) = y &\iff \ln(1 + e^x) = y \\ &\iff 1 + e^x = e^y \\ &\iff e^x = e^y - 1 \\ &\iff x = \ln(e^y - 1) \end{aligned}$$

   Ainsi, la réciproque de f est l'application $\begin{array}{rcl} f^{-1} :]0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(e^x - 1) \end{array}$

   D'après les théorèmes opératoires, f^{-1} est dérivable sur $]0, +\infty[$ et

   $$\forall x \in]0, +\infty[\quad (f^{-1})'(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}$$

---

3. **Exercice 14 :**
   La fonction g est strictement croissante sur $[\pi/2, \pi[$ (comme composée de deux fonctions strictement décroissantes), et continue.
   Par conséquent, g réalise une bijection de $[\pi/2, \pi[$ sur $\left[g(\pi/2), \lim_{x\to\pi^-} g(x)\right[= \left[1, +\infty\right[$.

   Soit $y \in [1, +\infty[$ et soit $x \in [\pi/2, \pi[$.

   $g(x) = y \iff \sin x = \frac{1}{y}$

   $\iff \arcsin(\sin x) = \arcsin(\frac{1}{y})$ car la fonction arcsin est injective

   Attention, *la relation* $\arcsin(\sin(t)) = t$ *est valable seulement pour* $t \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.
   On cherche un angle dans l'intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ *qui a le même sinus que* x.

   Or $\arcsin(\sin x) = \arcsin(\sin(\pi - x)) = \pi - x$ car $\pi - x \in]0, \pi/2]$.

   Ainsi, $g(x) = y \iff \pi - x = \arcsin(\frac{1}{y})$
   $\iff x = \pi - \arcsin(\frac{1}{y})$

   Ainsi, la réciproque de g est l'application $\begin{array}{rcl} g^{-1} : [1, +\infty[& \longrightarrow & [\pi/2, \pi[\\ x & \mapsto & \pi - \arcsin(\frac{1}{x}) \end{array}$

---

4. **Exercice 19-g :**

- **Domaine de définition de f :**

f est définie au point $x \iff x \neq 0$ et $\ln|x|$ a le même signe que x.
Le tableau suivant précise le signe de $\ln|x|$ en fonction de x :

x	$-\infty$		-1		0		1		∞
$\ln\|x\|$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

$\boxed{\text{Ainsi, } f \text{ est définie sur } [-1,0[\cup[1,+\infty[}$

- **Étude de f sur $[1,+\infty[$:**

Pour $x \in [1,+\infty[$, $f(x) = \sqrt{\frac{\ln x}{x}}$.
D'après les théorèmes généraux sur la dérivabilité, f est dérivable sur $]1,+\infty[$ et

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{\ln(x)}{x}}} \times \frac{\dfrac{1}{x}\times x - \ln x}{x^2} = \frac{1}{2f(x)} \times \frac{1-\ln x}{x^2}$$

Sur l'intervalle $]1,+\infty[$, $f'(x)$ s'annule seulement pour $x = e$ et est du signe de $1 - \ln(x)$.

<u>Dérivabilité au point 1 :</u>

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \sqrt{\frac{\ln x}{x(x-1)^2}} = \sqrt{\frac{\ln x}{x-1} \times \frac{1}{x(x-1)}}$$

Comme $\ln$ est dérivable au point 1, on a $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1} = \ln'(1) = 1$

De plus, $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1}{x(x-1)} = +\infty$, on en déduit que $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\ln x}{x-1}\times\dfrac{1}{x(x-1)} = +\infty$, puis $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = +\infty$

f n'est pas dérivable au point 1.

<u>Limite en $+\infty$:</u>

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ (croissances comparées), donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

<u>Tableau de variations :</u>

x	1		e		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$e^{-1/2}$	$\searrow$	0

- **Étude de f sur $[-1,0[$:**

Pour $x \in [-1,0[$, $f(x) = \sqrt{\frac{\ln(-x)}{x}}$.
D'après les théorèmes généraux sur la dérivabilité, f est dérivable sur $]-1,0[$ et

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{\ln(-x)}{x}}} \times \frac{\dfrac{1}{x}\times x - \ln(-x)}{x^2} = \frac{1}{2f(x)} \times \frac{1-\ln(-x)}{x^2}$$

Sur l'intervalle $]-1,0[$, $\ln(-x) < 0$, donc $f'(x) > 0$.

<u>Dérivabilité au point 1 :</u>

$$\frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \sqrt{\frac{\ln(-x)}{x(x+1)^2}} = \sqrt{\frac{\ln(-x)}{x+1} \times \frac{1}{x(x+1)}}$$

On a vu précédemment que $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(x)}{x-1} = +\infty$.

$$\left.\begin{array}{l} t = -x \underset{x\to-1}{\longrightarrow} 1 \\[2ex] \dfrac{\ln(t)}{1-t} \underset{t\to 1}{\longrightarrow} -1 \end{array}\right\} \text{par composition des limites, on obtient } \lim_{x\to-1} \frac{\ln(-x)}{1+x} = -1$$

Et $\lim\limits_{x\to-1^+} x(x+1) = 0^-$, donc $\lim\limits_{x\to-1^+} \dfrac{1}{x(x+1)} = -\infty$.

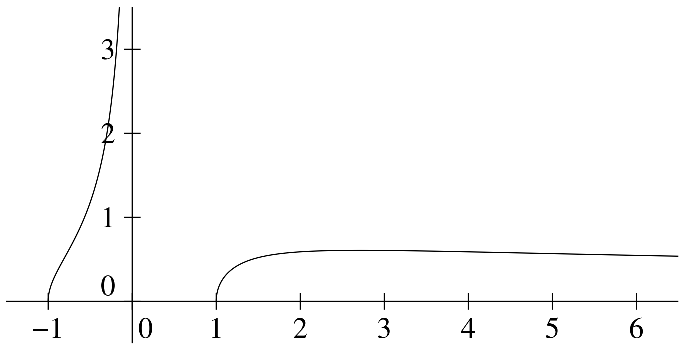
Par conséquent, $\lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{\ln(-x)}{x+1} \times \dfrac{1}{x(x+1)} = +\infty$, puis $\lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{f(x) - f(-1)}{x+1} = +\infty$

f n'est pas dérivable au point -1.

<u>Limite en 0 :</u>

$\lim\limits_{x \to 0^-} \ln(-x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$

Par produit, $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{\ln(-x)}{x} = +\infty$, puis $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$.



---

5. **Exercice 24-c :** résoudre l'équation $\arcsin\left(x + \dfrac{1}{2}\right) - \arcsin(x) = \dfrac{\pi}{3}$

L'équation est définie sur $\left[-1, \dfrac{1}{2}\right]$.

Analyse : supposons x solution de l'équation.

$$\arcsin\left(x + \frac{1}{2}\right) - \arcsin(x) = \frac{\pi}{3}$$

$$\arcsin\left(x + \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3} + \arcsin(x)$$

$$\text{donc } \sin\left(\arcsin\left(x + \frac{1}{2}\right)\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} + \arcsin(x)\right)$$

En utilisant les formules d'addition, on obtient :

$$x + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{x}{2}$$

Après multiplication par 2 et simplification, on a alors :

$$x + 1 = \sqrt{3}\sqrt{1-x^2}$$

$$\text{donc } (x+1)^2 = 3(1-x^2)$$

$$x^2 + 2x + 1 = 3 - 3x^2$$

$$2x^2 + x - 1 = 0$$

D'où $x = -1$ ou $x = \dfrac{1}{2}$

Synthèse :

Supposons $x = -1$.

Alors $\arcsin\left(x + \dfrac{1}{2}\right) - \arcsin(x) = -\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{2}$

$= \dfrac{\pi}{3}$

Donc -1 est solution de l'équation.

Supposons $x = \dfrac{1}{2}$.

Alors $\arcsin\left(x + \dfrac{1}{2}\right) - \arcsin(x) = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{6}$

$= \dfrac{\pi}{3}$

Donc $\dfrac{1}{2}$ est solution de l'équation.

Conclusion : $\boxed{\text{l'ensemble des solutions est } S = \left\{-1, \dfrac{1}{2}\right\}}$

---

6. **Exercice 24-g :** résoudre l'équation $\arccos(2x-1) = 2\arcsin(x)$

   L'équation est définie sur $[0,1]$.

   Analyse : supposons x solution de l'équation.

$$\arccos(2x-1) = 2\arcsin(x)$$
$$\text{donc } \cos(\arccos(2x-1)) = \cos(2\arcsin(x))$$
$$2x-1 = 1-2\sin^2(\arcsin(x))$$
$$2x-1 = 1-2x^2$$
$$x^2+x-1=0$$

   On obtient donc $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ou $x = \frac{-\sqrt{5}-1}{2}$

   Synthèse :

   $\frac{-\sqrt{5}-1}{2}$ n'appartient pas à $[0,1]$ donc n'est pas solution de l'équation.

   Pour $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, on a : $x^2+x-1=0$, donc $2x-1 = 1-2x^2$

$$\cos(\arccos(2x-1)) = \cos(2\arcsin(x))$$

   Comme $x \in [0,1]$, $\arcsin(x) \in [0, \frac{\pi}{2}]$, donc $2\arcsin(x) \in [0,\pi]$
   Et $\arccos(2x-1) \in [0,\pi]$.
   La fonction cos étant injective sur $[0,\pi]$, on en déduit que $\arccos(2x-1) = 2\arcsin(x)$.
   $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ est donc solution.

   $\boxed{\text{L'équation admet donc une unique solution : } \frac{\sqrt{5}-1}{2}}$

---

7. **Exercice 33 :**

   (a) $\sqrt{1-x^2}$ est définie si et seulement si $x \in [-1,1]$.

   Pour $x \in [-1,1]$, $f(x)$ est définie

$$\begin{aligned}
&\text{si et seulement si} && -1 \leq \frac{x+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}} \leq 1 \\
&\text{si et seulement si} && \left(\frac{x+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}}\right)^2 \leq 1 \\
&\text{si et seulement si} && 1+2x\sqrt{1-x^2} \leq 2 \\
&\text{si et seulement si} && 2x\sqrt{1-x^2} \leq 1
\end{aligned}$$

   Cette dernière inégalité est vérifiée lorsque $x<0$.
   Pour $x \in [0,1]$, comme $2x\sqrt{1-x^2}$ est positif, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
2x\sqrt{1-x^2} \leq 1 &\iff 4x^2(1-x^2) \leq 1 && \textit{car la fonction } t \mapsto t^2 \textit{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+ \\
&\iff 4x^4-4x^2+1 \geq 0.
\end{aligned}$$

   Or $4x^4-4x^2+1 = (2x^2-1)^2 \geq 0$.
   On en déduit que pour $x \in [-1,1]$, la condition $2x\sqrt{1-x^2} \leq 1$ est toujours satisfaite, et ainsi que $f(x)$ est bien définie.

   $\boxed{\text{Ainsi, } f \text{ est définie sur } [-1,1]}$

   (b) On a :

$$\frac{x+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sin(t)+\sqrt{1-\sin^2(t)}}{\sqrt{2}} = \frac{\sin(t)+\sqrt{\cos^2(t)}}{\sqrt{2}} = \frac{\sin(t)+|\cos(t)|}{\sqrt{2}}$$

   Or $t = \arcsin(x) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, donc $\cos(t) \geq 0$. D'où

$$\frac{x+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sin(t)+\cos(t)}{\sqrt{2}}$$

   On obtient ainsi $\sin(t+\frac{\pi}{4}) = \sin(t)\cos(\frac{\pi}{4})+\cos(t)\sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sin(t)+\cos(t)}{\sqrt{2}}$

   On a alors $f(x) = \arcsin(\sin(t+\frac{\pi}{4}))$.

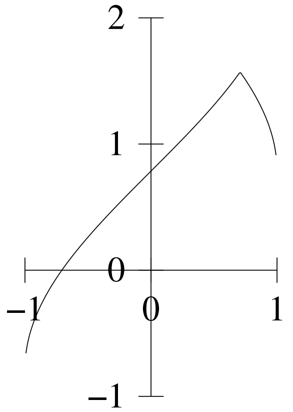
   Si $x \in \left[-1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$, alors $t = \arcsin(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right]$ et donc $t+\frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ d'où $f(x) = t+\frac{\pi}{4} = \arcsin(x)+\frac{\pi}{4}$

Si $x \in \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right]$, alors $t+\frac{\pi}{4} \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right]$ et donc $\pi - t - \frac{\pi}{4} \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ d'où $f(x) = \arcsin(\sin(\frac{3\pi}{4} - t)) = \frac{3\pi}{4} - \arcsin(x)$

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} \arcsin(x) + \frac{\pi}{4} & \text{si } -1 \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{3\pi}{4} - \arcsin(x) & \text{si } \frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq 1 \end{cases}}$$

c) La courbe de f sur $\left[-1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ s'obtient en translatant la courbe de la fonction arcsin du vecteur $\overrightarrow{u} = (0, \frac{\pi}{4})$

La courbe de f sur $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right]$ s'obtient en translatant la courbe de la fonction $-$ arcsin du vecteur $\overrightarrow{v} = (0, \frac{3\pi}{4})$



---

8. **Exercice 33 :**

• f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$f'(x) = 2\text{ch}(2x) - 2\text{sh}(x)$

Si $x < 0$, alors $-\text{sh}(x) > 0$ et $\text{ch}(2x) > 0$, donc $f'(x) > 0$.

Si $x \geq 0$, alors $2x \geq x$
puis $\text{ch}(2x) \geq \text{ch}(x)$ par croissance de la fonction ch sur $\mathbb{R}_+$
$\text{ch}(2x) - \text{sh}(x) \geq \text{ch}(x) - \text{sh}(x)$
Comme $\text{ch}(x) - \text{sh}(x) = e^{-x} > 0$, on en déduit que $f'(x) > 0$

$\boxed{\text{Ainsi, } f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}}$

Autre justification :

$f'(x) = 2\text{ch}(2x) - 2\text{sh}(x) = 2 + 4\text{sh}^2(x) - 2\text{sh}(x)$
en utilisant la formule de duplication $ch(2x) = 1 + 2sh^2(x)$

D'où $f'(x) = 1 + 3\text{sh}^2(x) + \left(\text{sh}(x) - 1\right)^2$
Ainsi, $f'(x) > 0$

• **Limites de f :**

Comme $\lim_{x \to -\infty} \text{sh}(2x) = -\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} \text{ch}(x) = +\infty$, $\boxed{\text{alors } \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty}$

D'après la formule de duplication, $f(x) = 2\text{sh}(x)\text{ch}(x) - 2\text{ch}(x) = 2\text{ch}(x)\left(\text{sh}(x) - 1\right)$
$\lim_{x \to +\infty} 2\text{ch}(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} \text{sh}(x) - 1 = +\infty$,

$\boxed{\text{donc } \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$

• **Valeur d'annulation de f :**

$$\begin{aligned}
f(x)=0 &\Longleftrightarrow 2\mathrm{ch}(x)\Big(\mathrm{sh}(x)-1\Big)=0\\
&\Longleftrightarrow \mathrm{sh}(x)=1 \text{ car } \mathrm{ch}(x)\neq 0\\
&\Longleftrightarrow e^{x}-e^{-x}=2\\
&\Longleftrightarrow e^{x}-\frac{1}{e^{x}}=2\\
&\Longleftrightarrow \frac{e^{2x}-1}{e^{x}}=2\\
&\Longleftrightarrow e^{2x}-1=2e^{x}\\
&\Longleftrightarrow X^{2}-2X-1=0 \text{ avec } X=e^{x}\\
&\Longleftrightarrow e^{x}=1+\sqrt{2} \text{ ou } e^{x}=1-\sqrt{2}
\end{aligned}$$

Comme $1-\sqrt{2}<0$ et $e^{x}>0$, l'équation $e^{x}=1-\sqrt{2}$ n'a pas de solution

On obtient ainsi : $f(x)=0 \Longleftrightarrow x=\ln(1+\sqrt{2})$

Calcul de $f'(a)$ pour $a=\ln(1+\sqrt{2})$:

On a $f'(a)=2\mathrm{ch}(a)-2\mathrm{sh}(a)=2+4\mathrm{sh}^{2}(a)-2\mathrm{sh}(a)$

Or $\mathrm{sh}(a)=1$ *car $a=\ln(1+\sqrt{2})$ est solution de l'équation $sh(x)=1$*

D'où $f'(a)=4$.

Autre point remarquable de la courbe : $f(0)=-2$ et $f'(0)=2$

Pour tracer la courbe de f, on s'appuie sur les deux points $A(0,-2)$ et $B(a,0)$ dont les pentes des tangentes sont respectivement 2 et 4. $a \simeq 0.88$