Exercice 1 :

b) *on reconnaît la forme* $u' \times u^{-5}$ *qui s'intègre en* $-\frac{u^{-4}}{4}$:
$x \mapsto -\frac{1}{4\ln^4(x)}$ est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x\ln^5(x)}$ sur $]1, +\infty[$.

c) $\forall x \in \mathbb{R}^*$ $\quad \dfrac{1}{\text{th } x} = \dfrac{\text{ch } x}{\text{sh } x}$. $x \mapsto \dfrac{1}{\text{th } x}$ admet pour primitive $x \mapsto \ln(-\text{sh } x)$ sur $\mathbb{R}_-^*$.

d) *on reconnaît la forme* $\frac{u'}{u}$ *qui s'intègre en* $\ln|u|$ *:*
$x \mapsto \frac{1}{3}\ln(1+x^3)$ est une primitive de $x \mapsto \frac{x^2}{1+x^3}$ sur $]-1, +\infty[$.

e) *on reconnaît ici une fonction de la forme* $u'u^{-1/2}$ *:*
$x \mapsto \dfrac{1}{\cos^2(x)\sqrt{\tan(x)}}$ admet pour primitive $x \mapsto 2\sqrt{\tan(x)}$ sur $]0, \frac{\pi}{2}[$.

g) *on reconnaît ici une fonction de la forme* $\dfrac{u'}{1+u^2}$ *:*
$x \mapsto \dfrac{\text{sh}(x)}{1+\text{ch}^2(x)}$ admet pour primitive $x \mapsto \arctan(\text{ch}(x))$ sur $\mathbb{R}$.

h) *on reconnaît ici une fonction de la forme* $\dfrac{u'}{2u^5}$ *:*
$x \mapsto \dfrac{x}{(1+x^2)^5}$ admet pour primitive $x \mapsto \dfrac{-1}{8(1+x^2)^4}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 :

$$I_1 = \left[\frac{e^{t^2}}{2}\right]_0^1 = \frac{e-1}{2} \qquad\qquad I_2 = \left[\frac{\ln^4(t)}{4}\right]_1^e = \frac{1}{4}$$

$$I_4 = \int_0^1 \frac{1-it}{1+t^2}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} - i\int_0^1 \frac{t\mathrm{d}t}{1+t^2} = [\arctan(t)]_0^1 - i\left[\frac{\ln(1+t^2)}{2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - i\ln(2)$$

$$I_7 = \left[\frac{2}{15}(4+5x)^{3/2}\right]_1^{12} = \frac{2}{15}\left(64^{3/2} - 9^{3/2}\right) = \frac{2}{15}(512-27) = \frac{194}{3}$$

$$I_8 = \left[\frac{-1}{2(x-2)^2}\right]_3^4 = -\frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

On cherche deux réels a et b tels que

$$\frac{1}{x(2x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{2x+1} = \frac{a(2x+1)+bx}{x(2x+1)}$$

c'est-à-dire tels que $\begin{cases} 2a + b = 0 \\ a = 1 \end{cases}$
$a = 1$ et $b = -2$ conviennent. On a alors :

$$I_9 = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{2x+1}\right)\mathrm{d}x = [\ln(x) - \ln(2x+1)]_1^2 = \ln(2) - \ln(5) + \ln(3) = \ln\left(\frac{6}{5}\right)$$

Exercice 3 :

a) Calcul de linéarisation :

$$f(x) = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}\left(e^{3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix}\right) = \frac{\cos(3x) + 3\cos(x)}{4}$$

$F : x \mapsto \dfrac{\sin(3x)}{12} + \dfrac{3\sin(x)}{4}$ est une primitive de f.

b) $f(x) = (1-\sin^2(x))\cos(x)$, donc f admet pour primitive $x \mapsto \sin(x) - \dfrac{\sin^3(x)}{3}$

Exercice 4 :

En utilisant les formules trigonométriques, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \cos(2x)\sin(3x) = \frac{1}{2}(\sin(5x) + \sin(x))$$

Par conséquent, une primitive de $x \mapsto \cos(2x)\sin(3x)$ sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto -\dfrac{\cos(5x)}{10} - \dfrac{\cos(x)}{2}$

Exercice 8 :

- Primitive F de $x \mapsto x\sin^2(x)$ qui s'annule en 0 : $F(x) = \int_0^x t\sin^2(t)\mathrm{d}t$

On effectue une intégration par parties avec $u'(t) = \sin(t)$ et $v(t) = t\sin(t)$, ce qui donne :

$$F(x) = [-t\sin(t)\cos(t)]_0^x + \int_0^x (\sin(t)+t\cos(t))\cos(t)\mathrm{d}t = -x\sin(x)\cos(x) + \left[\frac{\sin^2(t)}{2}\right]_0^x + \int_0^x t\cos^2(t)\mathrm{d}t$$

Et $\displaystyle\int_0^x t\cos^2(t)\mathrm{d}t = \int_0^x t(1-\sin^2(t))\mathrm{d}t = \int_0^x t\mathrm{d}t - F(x) = \frac{x^2}{2} - F(x)$

On en déduit que : $F(x) = -\dfrac{x\sin(x)\cos(x)}{2} + \dfrac{\sin^2(x)}{4} + \dfrac{x^2}{4}$

on peut calculer autrement $F(x)$ en notant que $t\sin^2(t) = \frac{t(1-\cos(2t))}{2}$, on exploite alors la linéarité de l'intégrale et on intègre $t\cos(2t)$ par parties

- $\displaystyle\int_0^x (t+1)\mathrm{ch}(t)\mathrm{d}t = [(t+1)\mathrm{sh}(t)]_0^x - \int_0^x \mathrm{sh}(t)\mathrm{d}t = (x+1)\mathrm{sh}(x) - [\mathrm{ch}(t)]_0^x = (x+1)\mathrm{sh}(x) - \mathrm{ch}(x) + 1$

$x \longmapsto (x+1)\mathrm{sh}(x) - \mathrm{ch}(x) + 1$ est la primitive de $x \longmapsto (x+1)\mathrm{ch}(x)$ qui s'annule en 0.