1. **Exercice 19 :**

b) (E) est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 équivalente à $y' + \frac{\cos(x)}{\sin(x)}y = \sin(x)$.

$x \mapsto \ln(-\sin(x))$ est une primitive sur $]-\pi, 0[$ de $x \mapsto \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$.

Les solutions de l'équation homogène associée sont les fonctions y définies sur $]-\pi, 0[$ par

$$y(x) = Ce^{-\ln(-\sin(x))} = \frac{-C}{\sin(x)} \text{ avec } C \in \mathbb{R}$$

Ce sont aussi les fonctions y définies par $y(x) = \frac{D}{\sin(x)}$ avec $D \in \mathbb{R}$ (en posant $D = -C$)

On cherche une solution particulière f_P sous la forme $f_P(x) = \frac{D(x)}{\sin(x)}$ avec D une fonction dérivable.

f_P est dérivable, et f_P est solution de (E) si et seulement si $\forall x \in]-\pi, 0[\quad D'(x) = \sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$

Donc $D(x) = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4}$ convient. On obtient $y_P(x) = \frac{x}{2\sin(x)} - \frac{\sin(2x)}{4\sin(x)} = \frac{x}{2\sin(x)} - \frac{\cos(x)}{2}$.

Ainsi, les solutions de l'équation (E) sont les fonctions y définies sur $]-\pi, 0[$ par

$$\boxed{\forall x \in]-\pi, 0[\quad y(x) = \frac{x}{2\sin(x)} - \frac{\cos(x)}{2} + \frac{D}{\sin(x)} \quad \text{avec } D \in \mathbb{R}}$$

c) Même démarche qu'au cas précédent avec $t \mapsto t^2$ pour primitive de $t \mapsto 2t$.

On cherche une solution particulière f_P sous la forme $f_P(t) = C(t)e^{-t^2}$ avec C une fonction dérivable.

f_P est dérivable, et f_P est solution de (E) si et seulement si $\forall t \in \mathbb{R} \quad C'(t)e^{-t^2} = e^{t-t^2}$.

si et seulement si $\forall t \in \mathbb{R} \quad C'(t) = e^t$.

$C(t) = e^t$ convient.

On déduit alors que les solutions de l'équation (E) sont les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad y(t) = e^{t-t^2} + Ce^{-t^2} \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$

2. **Exercice 20 a**

(E) est une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficient constant.

On cherche une solution particulière f_{P1} de $(E_1) : y' + 2y = 2e^{3x}$ sous la forme $f_{P1}(x) = \lambda_1 e^{3x}$.

On cherche une solution particulière f_{P2} de $(E_2) : y' + 2y = 3e^{-2x}$ sous la forme $f_{P2}(x) = \lambda_2 x e^{-2x}$.

Après calculs on trouve $\lambda_1 = \frac{2}{5}$ et $\lambda_2 = 3$.

D'après le principe de superposition $f_{P1} + f_{P2}$ est une solution particulière de (E).

Les solutions de (E) sont donc les fonctions $x \mapsto \frac{2}{5}e^{3x} + (3x + C)e^{-2x}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

3. **Résolution avec Xcas :**

desolve(y'+2*y=2*exp(3*x)+3*exp(-2*x))

$$\frac{5c_0e^{-(2x)} + 15xe^{-(2x)} + 2e^{3x}}{5}$$