1. **Exercice 1f :**

   $u_{n+1} - u_n = a + 2(-1)^{n+1}$. On distingue 2 cas.

   Si $a \geq 2$: alors $u_{n+1} - u_n \geq 0$, la suite u est croissante.

   Si $0 < a < 2$: alors le signe de $u_{n+1} - u_n$ dépend de la parité de n, il est positif si n est impair et négatif si n est pair. La suite n'est pas monotone.

2. **Exercice 3 :**

   d) u est une suite récurrente linéaire homogène d'ordre 2.
   L'équation caractéristique associée $r^2 + 2r + 4 = 0$ admet deux solutions complexes conjuguées :
   $$r_1 = -1 + i\sqrt{3} = 2e^{2i\pi/3} \quad \text{et} \quad r_2 = 2e^{-2i\pi/3}$$
   Il existe donc $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que
   $$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = C_1 2^n \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) + C_2 2^n \sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)$$
   $u_0 = 2 = C_1$ et $u_1 = 1 = -C_1 + \sqrt{3}C_2$, d'où $C_2 = \sqrt{3}$.

   Ainsi, $u_n = 2^n \left[2\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) + \sqrt{3}\sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)\right]$

   f) u est une suite récurrente linéaire homogène d'ordre 2.
   L'équation caractéristique associée $r^2 - 4r + 4 = 0$ admet une solution réelle double : $r_0 = 2$.
   Il existe $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = (C_1 n + C_2)2^n$.
   $u_0 = -2 = C_2$ et $u_1 = 2 = 2(C_1 + C_2)$, donc $C_1 = 3$.
   $\boxed{\text{Ainsi, } u_n = (3n-2)2^n}$

   h) On pose $v_n = \sqrt[3]{u_n}$.
   $v_{n+2} = \sqrt[3]{u_{n+2}} = 4\sqrt[3]{u_{n+1}} - 3\sqrt[3]{u_n} = 4v_{n+1} - 3v_n$.
   v est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
   Après calculs, on obtient $v_n = 4 - 3^n$, puis $\boxed{u_n = (4-3^n)^3}$

3. **Exercice 4 :**

   u est une suite récurrente linéaire homogène d'ordre 2 d'équation caractéristique associée
   $$r^2 - (3-2i)r + (5-5i) = 0$$
   Le discriminant vaut : $\Delta = -15 + 8i$.
   On cherche alors une racine carrée δ de Δ. Après calculs, on trouve que $\delta = 1 + 4i$ convient.
   Les racines de l'équation caractéristique sont les nombres complexes $r_1 = 2 + i$ et $r_2 = 1 - 3i$.
   Il existe $(C_1, C_2) \in \mathbb{C}^2$ tel que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = C_1(2+i)^n + C_2(1-3i)^n$.
   On a de plus : $\begin{cases} u_0 = 0 = C_1 + C_2 \\ \\ u_1 = 1 + 4i = C_1(2+i) + C2(1-3i) \end{cases}$
   On obtient alors $C_1(1+4i) = 1 + 4i$, donc $C_1 = 1$ et $C_2 = -1$.
   $\boxed{\text{Ainsi, } u_n = (2+i)^n - (1-3i)^n}$

4. **Exercice 10 :**

   Analyse : soit f une fonction solution.
   Soit $x \in]0, +\infty[$.On définit la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ par $u_0 = x$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
   Comme f est à valeurs dans $]0, +\infty[$, alors $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n > 0$.
   De plus, $u_{n+2} = f(u_{n+1}) = f(f(u_n)) = 6u_n - f(u_n) = 6u_n - u_{n+1}$.
   La suite u est donc une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
   L'équation caractéristique associée a 2 racines : 2 et -3.
   Il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \alpha 2^n + \beta(-3)^n = (-3)^n \times \underbrace{\left[\alpha\left(-\frac{2}{3}\right)^n + \beta\right]}_{=v_n}$

   On a : $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \beta$.
   Si $\beta \neq 0$, alors v_n est de signe constant à partir d'un certain rang.
   Par conséquent, à partir d'un certain rang, le signe de $u_n = v_n(-3)^n$ dépend de la parité de n.
   Ce qui est contradictoire avec la suite u est à valeurs strictement positives.
   Ainsi, $\beta = 0$. Puis, $u_1 = 2\alpha = 2u_0$.

Or $u_1 = f(x)$ et $u_0 = x$. On obtient ainsi, $f(x) = 2x$.

Synthèse : soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = 2x$.
Alors $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(f(x)) = f(2x) = 4x$ et $6x - f(x) = 4x$.
Donc f est bien solution du problème.

Ainsi, il existe une unique fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(f(x)) = 6x - f(x)$: la fonction f définie par $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = 2x$.

5. **Exercice 31 :**

• L'entier n ne peut pas s'écrire sous la forme $\dfrac{(2k+1)\pi}{2}$ avec $k \in \mathbb{N}$, car sinon $\pi = \dfrac{2n}{2k+1}$ serait un nombre rationnel. Ainsi, $\tan(n)$ est bien défini.

$$t_{n+1} = \frac{\tan(n) + \tan(1)}{1 - \tan(n)\tan(1)} = \frac{t_n + \tan(1)}{1 - t_n \tan(1)}$$

• Supposons que la suite t possède une limite finie l : $t_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$ et $t_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$.

On pose $u_n = (1 - \tan(1)t_n)t_{n+1}$.
D'une part, $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} (1 - \tan(1)l)l$.

D'autre part, $t_n = t_n + \tan(1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l + \tan(1)$.

Par unicité de la limite, on déduit : $(1 - \tan(1)l)l = l + \tan(1)$,

Ce qui donne : $\tan(1)(l^2 + 1) = 0$. **Contradiction**

• Supposons que $t_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$:

$$t_{n+1} = \frac{1 + \dfrac{\tan(1)}{t_n}}{\dfrac{1}{t_n} - \tan(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\frac{1}{\tan(1)}$$

Ce qui est **contradictoire** avec $t_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

• Un raisonnement analogue prouve que la suite t ne peut pas diverger vers $-\infty$.

Ainsi, la suite t n'a pas de limite

6. **Exercice 39 :**

On revient à la définition pour prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{n} = l$.
Soit $\epsilon > 0$.
L'objectif est alors de construire un rang N à partir duquel $\left|\dfrac{u_n}{n} - l\right| \leq \epsilon$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_{n+1} - u_n) = l$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N_1 \qquad |u_{n+1} - u_n - l| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

Soit n un entier supérieur ou égal à N_1.
On note que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1} - u_k) = u_n - u_0$.
On a :
$$\begin{aligned}
\left|\frac{u_n}{n} - l\right| &= \frac{1}{n}|u_n - nl| \\
&= \frac{1}{n}\left|\sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1} - u_k - l) + u_0\right| \\
&\leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}|u_{k+1} - u_k - l| + \frac{|u_0|}{n} \qquad \text{(inégalité triangulaire)} \\
&\leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{N_1-1}|u_{k+1} - u_k - l| + \frac{1}{n}\sum_{k=N_1}^{n-1}\underbrace{|u_{k+1} - u_k - l|}_{\leq \frac{\epsilon}{2}} + \frac{|u_0|}{n}
\end{aligned}$$

On note $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{N_1-1}|u_{k+1} - u_k - l|$.

On obtient : $\left|\dfrac{u_n}{n} - l\right| \leq \dfrac{S + |u_0|}{n} + \dfrac{(n - N_1)\epsilon}{2n} \leq \dfrac{S + |u_0|}{n} + \dfrac{\epsilon}{2}$

Comme $\dfrac{S+|u_0|}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N_2 \quad \dfrac{S+|u_0|}{n} \leq \dfrac{\epsilon}{2}$

On pose alors $N = \max(N_1, N_2)$.
$\forall n \geq N$, $\left|\dfrac{u_n}{n} - l\right| \leq \dfrac{\epsilon}{2} + \dfrac{\epsilon}{2} = \epsilon$

$\boxed{\text{On a ainsi prouvé que } \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{n} = l}$

7. **Exercice 40 :**

a) $\forall t \in [0,1]$, $1+t^2 \geq 1$, donc $0 \leq \dfrac{1}{1+t^2} \leq 1$, puis $0 \leq \dfrac{t^n}{1+t^2} \leq t^n$

Par croissante de l'intégrale, on déduit : $0 \leq u_n \leq \displaystyle\int_0^1 t^n \mathrm{d}t$

Comme $\displaystyle\int_0^1 t^n \mathrm{d}t = \left[\dfrac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \dfrac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (thm de convergence par encadrement).

b) $u_{n+2} + u_n = \displaystyle\int_0^1 \dfrac{t^{n+2}+t^n}{1+t^2}\mathrm{d}t = \dfrac{1}{n+1}$

c) Pour $t \in [0,1]$, on a : $t \leq 1$, donc $t^{n+1} \leq t^n$, puis $\frac{t^{n+1}}{1+t^2} \leq \frac{t^n}{1+t^2}$.

Par croissance de l'intégrale, on déduit $u_{n+1} \leq u_n$: $\boxed{\text{la suite est décroissante}}$

d) Pour $n \geq 2$, on a : $u_{n+2} \leq u_n \leq u_{n-2}$.
En ajoutant u_n à cette inégalité et en utilisant le résultat de la question b, on obtient :

$$\dfrac{1}{n+1} \leq 2u_n \leq \dfrac{1}{n} \quad , \quad \text{par conséquent} \quad 1 - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{n}{n+1} \leq 2nu_n \leq 1$$

$\boxed{2nu_n\text{, étant encadré par deux termes de limite 1, tend vers 1 lorsque } n \text{ tend vers } +\infty}$

8. **Exercice 42 :**

1) • On suppose la suite (q_n) bornée.
La suite (r_n) est bornée (car convergente).
On a : $p_n = r_n q_n$. La suite (p_n) est bornée (produit de deux suites bornées).

• On suppose la suite (p_n) bornée : il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall \in \mathbb{N}$, $|p_n| \leq M$.
La suite $(|r_n|)$ converge vers $|x|$ qui est strictement positif, donc est supérieur à $\dfrac{|x|}{2}$ à partir d'un certain rang N.
Pour tout entier $n \geq N$, $q_n = \dfrac{|p_n|}{|r_n|} \leq \dfrac{2M}{|x|}$.
On pose $M' = \max\left(q_0, q_1, ..., q_{N-1}, \dfrac{2M}{|x|}\right)$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq q_n \leq M'$.
La suite (q_n) est donc bornée.

• On suppose les deux suites bornées.
La suite (q_n) est bornée, donc admet une suite extraite $(q_{\varphi(n)})$ convergente (théorème de Bolzano-Weierstrass).
La suite $(p_{\varphi(n)})$ est bornée, donc admet une suite extraite $(p_{\varphi(\psi(n))})$ convergente (théorème de Bolzano-Weierstrass).
La suite $(q_{\varphi(\psi(n))})$ est convergente (suite extraite d'une suite convergente).
Or toute suite convergente d'entiers est stationnaire (exercice classique de TD).
Il existe donc $P \in \mathbb{Z}$ et $Q \in \mathbb{N}^*$ tel que, à partir d'un certain rang, $p_{\varphi(\psi(n))} = P$ et $q_{\varphi(\psi(n))} = Q$.
On a alors $r_{\varphi(\psi(n))} = \frac{P}{Q}$.
La suite $(r_{\varphi(\psi(n))})$ converge donc vers $\frac{P}{Q}$ et vers x.
D'après l'unicité de la limite, on a donc $x = \frac{P}{Q}$: x est rationnel.

2) Si la suite $(|p_n|)$ ne diverge pas vers $+\infty$, alors elle admet une suite extraite $(|p_{\varphi(n)}|)$ bornée.
D'après la question 1, la suite $(q_{\varphi(n)})$ est bornée, et x est rationnel.
De même, si la suite (q_n) ne diverge pas vers $+\infty$, alors elle admet une suite extraite $(q_{\varphi(n)})$ bornée.
D'après la question 1, la suite $(p_{\varphi(n)})$ est bornée, et x est rationnel.

9. **Exercice 43 :**

On définit la fonction f sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ par $f(x) = x + \tan(x)$.
f est continue et strictement croissante, donc réalise une bijection de l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ vers l'intervalle $]\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}} f(x), \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)[= \mathbb{R}$.
L'équation $f(x) = n$ admet donc une unique solution.

Comme $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{-1}(x) = \dfrac{\pi}{2}$.

Par conséquent, $x_n = f^{-1}(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$.

10. **Exercice 46 :**

a) Soit f_n la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f_n(x) = x^n \ln(x)$.
f_n est dérivable et $f_n'(x) = nx^{n-1}\ln(x) + x^{n-1} = x^{n-1}(n\ln(x)+1)$.

On a : $f_n'(x) = 0 \iff \ln(x) = -\dfrac{1}{n}$

$\iff x = e^{-1/n}$

x	0		$e^{-1/n}$		$+\infty$
$f_n'(x)$		$-$	0	$+$	
f_n	0	$\searrow$	$-\frac{1}{en}$	$\nearrow$	$+\infty$

La fonction f_n est strictement négative sur $]0,e^{-1/n}]$, donc l'équation $f_n(x)=1$ n'a pas de solution dans l'intervalle $]0,e^{-1/n}]$.

La fonction f_n est continue et strictement croissante sur $[e^{-1/n},+\infty[$, donc réalise une bijection de $[e^{-1/n},+\infty[$ vers $[-\frac{1}{en},+\infty[$ qui contient 1.

$\boxed{\text{Ainsi, l'équation } f_n(x)=1 \text{ admet une unique solution}}$

b) Comme $f_n(1)=0$, alors $1 < x_n$.

Par définition de x_n et x_{n+1}, on a $f_n(x_n)=1$ et $f_{n+1}(x_{n+1})=1$.

Or $f_{n+1}(x_n) = x_n^{n+1}\ln(x_n) = x_n f_n(x_n) = x_n > 1 = f_{n+1}(x_{n+1})$.
Au vu des variations de la fonction f_{n+1}, on déduit que $x_n > x_{n+1}$.

$\boxed{\text{La suite } (x_n)_{n\geq 1} \text{ est décroissante}}$

Elle est de plus minorée par 1, donc elle est convergente.

Notons l sa limite.
Comme $x_n \geq 1$, on a : $l \geq 1$.

Supposons par l'absurde que $l > 1$.

$x_n \geq l$, donc $x_n^n \geq l^n$ et $\ln(x_n) \geq \ln(l)$.
Par conséquent, $x_n^n \ln(x_n) \geq l^n \ln(l)$.
Comme $l^n \ln(l) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, on déduit par le théorème de divergence par minoration que

$$x_n^n \ln(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

Ce qui est contradictoire avec $x_n^n \ln(x_n) = 1$.

$\boxed{\text{Ainsi, } l = 1}$

11. **Exercice 49 :**

Supposons par l'absurde que la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et notons L sa limite.
$|z_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |L|$ et $|z_n| = 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, donc $|L|=1$.
De plus, $z_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} L$ (suite extraite d'une suite convergente).
Et $z_{2n} = \exp(i\ln(2) + i\ln(n)) = \exp(i\ln(2))z_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \exp(i\ln(2))L$

Par unicité de la limite, on obtient $\exp(i\ln(2))L = L$.
L étant non nul, on déduit $\exp(i\ln(2)) = 1$, puis $\ln(2) \equiv 0\ [2\pi]$,
Donc $\dfrac{\ln(2)}{2\pi}$ est un entier.

Ce qui est contradictoire avec $0 < \dfrac{\ln(2)}{2\pi} < 1$.

$\boxed{\text{Ainsi, la suite } (z_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ diverge}}$

12. **Exercice 51 :**

On note $x_n = \mathrm{Re}(z_n)$ et $y_n = \mathrm{Im}(z_n)$.

Pour montrer que la suite z diverge, il suffit de montrer qu'une des deux suites x ou y diverge.

$$z_{n+1} = \frac{1}{4}\left(3x_n + 3iy_n - 2\sqrt{x_n^2+y_n^2}\right),\ \text{d'où}\ \left\{\begin{array}{l} x_{n+1} = \frac{1}{4}(3x_n - 2\sqrt{x_n^2+y_n^2}) \\ y_{n+1} = \frac{3y_n}{4} \end{array}\right.$$

La suite y est une suite géométrique de raison $\frac{3}{4}$ de premier terme $y_0 = 1$, donc $y_n = (\frac{3}{4})^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

$x_0 = 0$ et $x_1 = -\frac{1}{2}$.
On montre par une récurrence immédiate que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_n < 0$.

$$x_{n+1} - x_n = -\frac{x_n}{4} - \frac{1}{2}\sqrt{x_n^2 + y_n^2}$$

Or $\sqrt{x_n^2 + y_n^2} \geq \sqrt{x_n^2} = -x_n$ (car $x_n < 0$).
D'où $x_{n+1} - x_n \leq -\dfrac{x_n}{4} + \dfrac{x_n}{2} = \dfrac{x_n}{4} < 0$.
La suite x est strictement décroissante.
Supposons par l'absurde que x converge. Notons l sa limite.
Comme la suite est décroissante, on a $l \leq -\frac{1}{2}$.
$x_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$ et $x_{n+1} = \frac{1}{4}(3x_n - 2\sqrt{x_n^2 + y_n^2}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{3}{4}l - \frac{\sqrt{l^2}}{2}$ et $\sqrt{l^2} = |l| = -l$.
Par unicité de la limite, on déduit : $l = \frac{3}{4}l + \frac{1}{2}l$, ce qui donne $l = 0$. **Contradiction avec** $l \leq -\frac{1}{2}$.
Ainsi, la suite x diverge, $\boxed{\text{donc la suite } z \text{ diverge}}$