1. **Exercice 1c :**

   Étude des propriétés de la loi $\star$ définie sur $G =]1, +\infty[$ par : $\boxed{x \star y = \exp(\ln(x)\ln(y))}$

   Comme $x \in]1, +\infty[$ et $y \in]1, +\infty[$, alors $\ln(x)\ln(y) > 0$, par conséquent : $x \star y \in G$.
   La loi $\star$ est bien une loi de composition interne sur G.

   Il est immédiat que $y \star x = x \star y$: la loi $\star$ est commutative.

   Soit $(x, y, z) \in G^3$.
   $(x \star y) \star z = (\exp(\ln(x)\ln(y))) \star z = \exp(\ln(\exp(\ln(x)\ln(y)))\ln(z)) = \exp(\ln(x)\ln(y)\ln(z))$

   $x \star (y \star z = x \star (\exp(\ln(y)\ln(z))) = \exp(\ln(x)\ln(\exp(\ln(y)\ln(z)))) = \exp(\ln(x)\ln(y)\ln(z))$

   La loi $\star$ est associative.

   Vérifions que le nombre $e = \exp(1)$ est l'élément neutre de la loi $\star$:
   $x \star e = \exp(\ln(x)\ln(e)) = \exp(\ln(x)) = x$.

   Montrons que tout élément x de G est inversible.

   Il s'agit d'une question d'existence : on va définir un élément x' de G pour lequel $x \star x' = e$.
   Au brouillon, on résout l'équation $x \star x' = e$, qui donne $\exp(\ln(x)\ln(x')) = e$, puis $\ln(x)\ln(x') = 1$.
   Et enfin, $x' = \exp\left(\frac{1}{\ln(x)}\right)$.
   Toute cette étude a lieu au brouillon, car comme il s'agit d'une question d'existence, on ne peut pas sur la copie écrire x' tant que celui-ci n'a pas été introduit.

   On pose $x' = \exp\left(\frac{1}{\ln(x)}\right)$.
   Comme $\frac{1}{\ln(x)} > 0$, $x' > 1$: x' est bien un élément de G.
   $x \star x' = \exp(\ln(x)\ln(x')) = \exp\left(\ln(x)\,\frac{1}{\ln(x)}\right) = \exp(1) = e$
   La loi étant commutative, $x' \star x = e$.
   Ainsi, x est inversible.

   Tous les éléments de G sont inversibles pour la loi $\star$.

   Remarque : $(G, \star)$ est un groupe abélien.

---

2. **Exercice 1d :**

   Si $(x, y) \in G$ et $(x', y') \in G$, alors $x \neq 0$ et $x' \neq 0$, donc $xx' \in \mathbb{R}^*$.
   Pa conséquent, $(x, y) \star (x', y') \in G$: $\star$ **est une loi de composition interne sur G.**

   $(1, 2) \star (2, 3) = (2, 5)$ et $(2, 3) \star (1, 2) = (2, 7)$: **la loi $\star$ n'est pas commutative**

   Soient $(x, y) \in G$, $(x', y') \in G$ et $(x'', y'') \in G$.
   $\Big((x, y) \star (x', y')\Big) \star (x'', y'') = (xx', xy' + y) \star (x'', y'') = (xx'x'', xx'y'' + xy' + y)$.
   Et $(x, y) \star \Big((x', y') \star (x'', y'')\Big) = (x, y) \star (x'x'', x'y'' + y') = (xx'x'', xx'y'' + xy' + y)$
   Ainsi, $\Big((x, y) \star (x', y')\Big) \star (x'', y'') = (x, y) \star \Big((x', y') \star (x'', y'')\Big)$: **la loi $\star$ est associative**

   $(1, 0) \star (x, y) = (x, y)$ et $(x, y) \star (1, 0) = (x, y)$.
   $(1, 0)$ **est l'élément neutre de la loi $\star$.**

   Soit $(x, y) \in G$.
   On pose $x' = \frac{1}{x}$ et $y' = -\frac{y}{x}$ (*expressions trouvées au brouillon : on cherche x' et y' tels que $xx' = 1$ et $xy' + y = 0$*).
   Alors $(x', y') \in G$ et $(x, y) \star (x', y') = (xx', xy' + y) = (1, 0)$
   $(x', y') \star (x, y) = (x'x, x'y + y') = (1, 0)$.
   (x, y) est donc inversible d'inverse $(\frac{1}{x}, -\frac{y}{x})$.

   Tous les éléments de G sont inversibles pour la loi $\star$.

   Remarque : $(G, \star)$ est un groupe

---

3. **Exercice 3 :**

Montrons que e est l'élément neutre de la loi $*$:

Soit $x \in G$.
D'après (P_2), il existe $x' \in G$ tel que $x * x' = e$.
D'après (P_2), il existe $x'' \in G$ tel que $x' * x'' = e$.

On a : $x' * x * x' = x' * e = x'$.
Puis $x' * x * x' * x'' = x' * x'' = e$.
Or on a aussi : $x' * x * x' * x'' = x' * x * e = x' * x$.
On en déduit que : $x' * x = e$.

On a : $x * x' * x = e * x$ et $x * x' * x = x * e = x$.
Ainsi, $e * x = x$.

Par conséquent, on a montré d'une part que pour tout élément x de G, on a $x * e = e * x = x$, donc l'élément e est l'élément neutre de la loi $*$, et d'autre part que pour tout élément x de G, il existe un élément x' de G tel que $x * x' = x' * x = e$, c'est-à-dire que tous les éléments sont inversibles.

$\boxed{\text{Ainsi, } (G, *) \text{ est un groupe}}$

---

4. **Exercice 5 :**

1a) Soit $(x, y) \in I^2$.
Comme $|x| < 1$ et $|y| < 1$, alors $|x| \times |y| < 1$,
On a donc $-1 < xy < 1$, en particulier $1 + xy > 0$.
Ce qui justifie que $x * y = \dfrac{x+y}{1+xy}$ est bien défini.

$$1 - (x * y) = 1 - \frac{x+y}{1+xy} = \frac{1+xy-x-y}{1+xy} = \frac{(1-x)(1-y)}{1+xy} > 0 \quad \text{donc } x * y < 1$$

$$(x * y) + 1 = \frac{x+y}{1+xy} + 1 = \frac{1+xy+x+y}{1+xy} = \frac{(1+x)(1+y)}{1+xy} > 0 \quad \text{donc } x * y > -1$$

Ainsi, $x * y \in I$: $\boxed{\text{la loi } * \text{ est bien une loi de composition interne sur } I}$

1b) Pour $x \in I$ et $y \in I$, on a : $x * y = y * x$. **La loi est commutative.**

Soient x, y, $z \in I$.

$$(x * y) * z = \left(\frac{x+y}{1+xy}\right) * z = \frac{\frac{x+y}{1+xy} + z}{1 + \frac{x+y}{1+xy} z} = \frac{x+y+z+xyz}{1+xy+xz+yz}$$

$$x * (y * z) = x * \left(\frac{y+z}{1+yz}\right) = \frac{x + \frac{y+z}{1+yz}}{1 + x\frac{y+z}{1+yz}} = \frac{x+y+z+xyz}{1+xy+xz+yz}$$

Ainsi, $(x * y) * z = x * (y * z)$: **la loi est associative.**

On vérifie que 0 est élément neutre : $\forall x \in I \quad x * 0 = 0 * x = x$.

Enfin, soit $x \in I$. On a : $x * (-x) = (-x) * x = 0$. **Tout élément est donc inversible.**

$\boxed{\text{Ainsi, } (I, *) \text{ est un groupe abélien}}$

2a) $s^0 = 0$ et $\dfrac{p_0}{q_0} = 0$ donc $s^0 = \dfrac{p_0}{q_0}$

Supposons que $s^n = \dfrac{p_n}{q_n}$ pour un entier naturel $n \geq 0$.

$$s^{n+1} = s * s^n = s * \frac{p_n}{q_n} = \frac{s + \frac{p_n}{q_n}}{1 + s\frac{p_n}{q_n}} = \frac{sq_n + p_n}{q_n + sp_n} = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$$

$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } n \in \mathbb{N},\ s^n = \dfrac{p_n}{q_n}}$

2b) $q_{n+1} = sp_n + q_n = sp_n + \frac{1}{s}(p_{n+1} - p_n)$.
Puis, $p_{n+2} = p_{n+1} + sq_{n+1} = 2p_{n+1} + (s^2 - 1)p_n$.

c) La suite p est donc une suite récurrente linéaire homogène d'ordre 2.
L'équation caractéristique est $r^2 - 2r + (1 - s^2) = 0$. Le discriminant vaut $4s^2$.
Elle admet deux racines réelles distinctes : $1 + s$ et $1 - s$.
Il existe donc $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_n = C_1(1+s)^n + C_2(1-s)^n$.
Comme $p_0 = 0$, on a : $C_2 = -C_1$.

De plus, $p_1 = s$, d'où $C_1 = \frac{1}{2}$ et $C_2 = -\frac{1}{2}$.

$\boxed{\text{Ainsi, } p_n = \dfrac{(1+s)^n - (1-s)^n}{2}}$

De $sq_n = p_{n+1} - p_n$, $\boxed{\text{on déduit alors : } q_n = \dfrac{(1+s)^n + (1-s)^n}{2}}$

On a alors :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad s^n = \frac{p_n}{q_n} = \frac{(1+s)^n - (1-s)^n}{(1+s)^n + (1-s)^n}} \qquad \text{(formule valable pour } s = 0\text{)}$$

---

5. **Exercice 9 :**

a) Comme $H_1 \subset G$ et $H_2 \subset G$, alors $H_1 \cap H_2 \subset G$.

H_1 et H_2 sont des sous-groupes de G, donc $e \in H_1$ et $e \in H_2$. Par conséquent, $e \in H_1 \cap H_2$.

Soient $x \in H_1 \cap H_2$ et $y \in H_1 \cap H_2$.
$x \in H_1$ et $y \in H_2$, et comme H_1 est un sous-groupe de G, alors $xy^{-1} \in H_1$.
On a, de même, $xy^{-1} \in H_2$.
Donc $xy^{-1} \in H_1 \cap H_2$.

$\boxed{H_1 \cap H_2 \text{ est un sous-groupe de } G}$

b) Si $H_1 \subset H_2$, alors $H_1 \cup H_2 = H_2$ est un sous-groupe de G ,
et si $H_2 \subset H_1$, alors $H_1 \cup H_2 = H_1$ est un sous-groupe de G.

Supposons que $H_1 \not\subset H_2$ et $H_2 \not\subset H_1$.
Alors il existe $a \in H_1$ tel que $a \notin H_2$, et il existe $b \in H_2$ tel que $b \notin H_1$.
$a \in H_1 \cup H_2$ et $b \in H_1 \cup H_2$,
si $ab \in H_1$, alors $b = a^{-1}ab \in H_1$, ce qui est exclu. Donc $ab \notin H_1$.
si $ab \in H_2$, alors $a = abb^{-1} \in H_2$, ce qui est exclu. Donc $ab \notin H_2$.
Ainsi, $ab \notin H_1 \cup H_2$, donc $H_1 \cup H_2$ n'est pas un sous-groupe de G.

---

6. **Exercice 11 :**

$H \subset \mathcal{S}_X$.

Comme $\mathrm{id}(a) = a$, alors id$\in H$.

Soit $f \in H$ et soit $g \in H$ *(f et g sont des applications bijectives telle que $f(a) = a$ et $g(a) = a$)*
Alors $gof(a) = g(f(a)) = g(a) = a$, donc $gof \in H$.

Et $f(a) = a$, donc $f^{-1}(a) = a$ et ainsi, $f^{-1} \in H$.

$\boxed{\text{Ainsi, } H \text{ est un sous-groupe de } (\mathcal{S}_X, \mathrm{o})}$

---

7. **Exercice 16 :**

$A \subset \mathbb{Q}$.

$1 \in A$ car $1 = \dfrac{1}{2^0}$

Soit $(x, y) \in A^2$: il existe $(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ tel que $x = \dfrac{m}{2^n}$ et il existe $(m', n') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ tel que $y = \dfrac{m'}{2^{n'}}$

Alors $x - y = \dfrac{m2^{n'} - m'2^n}{2^{n+n'}}$ appartient à A (car $m2^{n'} - m'2^n \in \mathbb{Z}$ et $n + n' \in \mathbb{N}$)

Et $xy = \dfrac{mm'}{2^{n+n'}}$ appartient à A (car $mm' \in \mathbb{Z}$ et $n + n' \in \mathbb{N}$)

$\boxed{\text{Donc } A \text{ est un sous-anneau de } (\mathbb{Q}, +\times)}$

Soit x un élément inversible de A : il existe $(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ tel que $x = \dfrac{m}{2^n}$.
Il existe $y \in A$ tel que $xy = 1$.

Il existe $(m', n') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ tel que $y = \dfrac{m'}{2^{n'}}$

On obtient $mm' = 2^{n+n'}$.
On en déduit que m est une puissance de 2 : il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $m = 2^k$.
En effet, si d est un diviseur premier de m, alors d divise aussi mm', donc d divise $2^{n+n'}$, et ainsi $d = 2$.
Cela prouve que m est soit égal à 1, soit une puissance de 2

Réciproquement, on vérifie que $x = \dfrac{2^k}{2^n}$ (avec $(k,n) \in \mathbb{N}^2$) est un élément inversible de A.

On pose $y = \dfrac{2^n}{2^k}$.
$y \in A$ et $xy = 1$.

$\boxed{\text{Ainsi, l'ensemble des éléments inversibles de } A \text{ est l'ensemble } \left\{\dfrac{2^k}{2^n} \mid (k,n) \in \mathbb{N}^2\right\} \text{ ou encore } \left\{2^i \mid i \in \mathbb{Z}\right\}}$

---

8. **Exercice 20 :**

1) *On montre les différents points de la définition d'anneau.*

On vérifie facilement que $(\mathbb{Z}^2,+)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}^2,+)$ donc est un groupe abélien.

<u>associativité de $*$:</u>
Soient $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$, $(x',y') \in \mathbb{Z}^2$ et $(x'',y'') \in Z^2$.

$$\begin{aligned}((x,y)*(x',y'))*(x'',y'') &= (xx'+yy', xy'+yx')*(x'',y'') \\ &= (xx'x''+yy'x''+xy'y''+yx'y'', xx'y''+yy'y''+xy'x''+yx'x'')\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x,y)*((x',y')*(x'',y'')) &= (x,y)*(x'x''+y'y'', x'y''+y'x'') \\ &= (xx'x''+xy'y''+yx'y''+yy'x'', xx'y''+xy'x''+yx'x''+yy'y'')\end{aligned}$$

Ainsi, $((x,y)*(x',y'))*(x'',y'') = (x,y)*((x',y')*(x'',y''))$: la loi $*$ est associative.

<u>commutativité de $*$:</u>
Soient $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$, $(x',y') \in \mathbb{Z}^2$.

$(x',y')*(x,y) = (x'x+y'y, x'y+y'x) = (xx'+yy', xy'+yx') = (x,y)*(x',y')$.
La loi $*$ est commutative.

<u>distributivié de $*$ par rapport à $+$:</u>
Soient $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$, $(x',y') \in \mathbb{Z}^2$ et $(x'',y'') \in Z^2$.

$$\begin{aligned}(x,y)*((x',y')+(x'',y'')) &= (x,y)*(x'+x'', y'+y'') \\ &= (xx'+xx''+yy'+yy'', xy'+xy''+yx'+yx'') \\ &= (xx'+yy', xy'+yx')+(xx''+yy'', xy''+yx'') \\ &= (x,y)*(x',y')+(x,y)*(x'',y'')\end{aligned}$$

$*$ est donc distributive à gauche par rapport à $+$.
Comme $*$ est commutative, $*$ est également distributive à droite par rapport à $+$.

<u>élement neutre de la loi $*$:</u>
Comme pour tout $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$, $(x,y)*(1,0) = (1,0)*(x,y) = (x,y)$, l'élément $(1,0)$ est élément neutre de la loi *.

$\boxed{\text{Ainsi, } (\mathbb{Z}^2,+,*) \text{ est un anneau commutatif}}$

Comme $(1,1)*(1,-1) = (0,0)$, **l'anneau n'est pas intègre**.

2) **Analyse des éléments inversibles :**

Soit (x,y) un élément inversible de $\mathbb{Z}^2$: il existe $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $(x,y)*(a,b) = (1,0)$.

Ce qui donne : $\begin{cases} xa+yb=1 & (1) \\ xb+ya=0 & (2) \end{cases}$

(1)+(2) donne $x(a+b)+y(a+b)=1$, donc $(x+y)(a+b)=1$.
On en déduit que $x+y$ divise 1, donc $x+y=1$ ou $x+y=-1$.

(1)-(2) donne $x(a-b)+y(b-a)=1$, donc $(x-y)(a-b)=1$.
On en déduit que $x-y$ divise 1, donc $x-y=1$ ou $x-y=-1$.

On distingue alors quatre cas :

- si $x+y=1$ et $x-y=1$, alors $x=1$ et $y=0$
- si $x+y=1$ et $x-y=-1$, alors $x=0$ et $y=-1$
- si $x+y=-1$ et $x-y=1$, alors $x=0$ et $y=-1$
- si $x+y=-1$ et $x-y=-1$, alors $x=-1$ et $y=0$

Synthèse : réciproquement, on vérifie que les quatre couples trouvés sont bien inversibles.
$(1,0)\times(1,0) = (1,0)$, donc $(1,0)$ est inversible d'inverse $(1,0)$.
$(0,1)\times(0,1) = (1,0)$, donc $(0,1)$ est inversible d'inverse $(0,1)$.
$(0,-1)\times(0,-1) = (1,0)$, donc $(0,-1)$ est inversible d'inverse $(0,-1)$.
$(-1,0)\times(-1,0) = (1,0)$, donc $(-1,0)$ est inversible d'inverse $(-1,0)$.

---

9. **Exercice 21 :**

1) 0 est un élément nilpotent de A, car $0^1 = 0$.

Soit a un élément non nul. Montrons que a n'est pas nilpotent.
$a \neq 0$, et si pour un entier $n \geq 1$, $a^n \neq 0$, alors $a^{n+1} = a \times a^n \neq 0$ (le produit de deux éléments non nuls dans un anneau intègre est un élément non nul).
On a donc montré par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad a^n \neq 0$.
Ainsi, a n'est pas nilpotent.

$\boxed{\text{0 est donc le seul élément nilpotent}}$

2) Soit a un élément nilpotent : il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $a^n = 0$.
On a alors

$$(1-a)\sum_{k=0}^{n-1} a^k = 1 - a^n = 1 \quad \text{et} \quad \left(\sum_{k=0}^{n-1} a^k\right)(1-a) = 1 - a^n = 1$$

$\boxed{\text{On en déduit que } 1-a \text{ est inversible}}$

3) Supposons que a et b sont deux éléments nilpotents qui commutent :
il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $a^n = 0$ et il existe $p \in \mathbb{N}^*$tel que $b^p = 0$.
Comme a et b commutent, $(ab)^n = a^n b^n$ et $a^n = 0$, donc $(ab)^n = 0$.
$\boxed{\text{Ainsi, } ab \text{ est nilptotent}}$

$$(a+b)^{n+p} = \sum_{k=0}^{n+p} \binom{n+p}{k} a^k b^{n+p-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+p}{k} a^k \underbrace{b^p}_{=0} b^{n-k} + \sum_{k=n+1}^{n+p} \binom{n+p}{k} \underbrace{a^n}_{=0} a^{k-n} b^{n+p-k} = 0 + 0 = 0$$

$\boxed{\text{Donc } a+b \text{ est nilpotent}}$

4) Supposons ab nilpotent. Il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $(ab)^n = 0$.

Alors $(ba)^{n+1} = b(ab)^n a = 0$, $\boxed{\text{donc } ba \text{ est nilpotent}}$

---

10. **Exercice 23 :**

Supposons que $1_A - ab$ soit inversible.
Il existe $c \in A$ tel que $(1_A - ab)c = c(1_A - ab) = 1_A$.

$$\begin{aligned}(1_A - ba)(1_A + bca) &= 1_A - ba + bca - babca \\ &= 1_A - b\Big(1_A - (1_A - ab)c\Big)a \\ &= 1_A - b \times 0_A \times a = 1_A.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(1_A + bca)(1_A - ba) &= 1_A - ba + bca - bcaba \\ &= 1_A - b\Big(1_A - c(1_A - ab)\Big)a \\ &= 1_A - b \times 0_A \times a = 1_A\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Ainsi, } 1_A - ba \text{ est inversible}}$

---

11. **Exercice 24 :**

1) $C \subset A$.
Comme $\forall y \in A$, $1_A \times y = y \times 1_A$, $\underline{1_A \in C}$
Soit $(x, x') \in C^2$.
$\forall y \in A$, $(x - x')y = xy - x'y = yx - yx'$ (car x et x' commutent avec y).
Donc $\forall y \in A$, $(x - x')y = y(x - x')$. Ainsi, $\underline{x - x' \in C}$
Et $\forall y \in A$, $xx'y = xyx'$ (car $x' \in C$), puis $xx'y = yxx'$ (car $x \in C$).
D'où $\underline{xx' \in C}$

$\boxed{C \text{ est un sous-anneau de } A}$

2a) Soit $(x, y) \in A^2$ tel que $xy = 0_A$.
$yx = (yx)^3 = y \times xy \times xyx = y \times 0_A \times xyx = 0_A$.

2b) Soit $y \in A$.
$x(y - xy) = xy - x^2y = xy - xy = 0_A$. D'après 2a, on a alors $(y - xy)x = 0_A$.
Ce qui donne, $yx - xyx = 0_A$, et donc $yx = xyx$.

De plus, $(y - yx)x = yx - yx^2 = yx - yx = 0_A$. D'après 2a, on a alors $x(y - yx) = 0_A$, ce qui donne $xy = xyx$.

On en déduit que $\forall y \in A$, $xy = yx$. $\boxed{\text{Ainsi, } x \in C}$

2c) Soit $x \in A$. $(x^2)^2 = x^4 = x^3 \times x = x \times x = x^2$.
D'après 2b (tout élément égal à son carré appartient à C), $x^2 \in C$.

2d) Soit $(x, y) \in A^2$. $xy = (xy)^3 = xyxyxy = x(yx)^2y$.
Or d'après 2c, $(yx)^2$ appartient à C, donc commute avec y.
D'où $xy = xy(yx)^2$, ce qui donne : $xy = xy \times yxyx = xy^2xyx$.
y^2 appartient également à C, donc commute avec x.
On obtient alors : $xy = y^2x^2yx$.
Enfin, x^2 appartient à C, donc commute avec y.
Ainsi, $xy = y^2yxx^2 = y^3x^3 = yx$.

$\boxed{\text{L'anneau } A \text{ est donc commutatif}}$

Commentaires : le résultat de cet exercice se généralise quand on remplace l'exposant 3 par un entier n quelconque : un anneau A pour lequel il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall x \in A$, $x^n = x$, est commutatif.
On dispose même d'un résultat plus fort : le théorème de Jacobson qui énonce que si $\forall x \in A \quad \exists n \in \mathbb{N}^* \quad x^n = x$, alors l'anneau A est commutatif.
Cet exercice permet de découvrir le travail des algébristes qui s'intéressent aux propriétés des anneaux.

---

12. **Exercice 28 :**

Soit f un morphisme d'anneaux de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = x$.
On a : $f(i) \times f(i) = f(i \times i) = f(-1) = -1$.
$f(i)$ est donc solution de l'équation $Z^2 = -1$, donc $f(i) = i$ ou $f(i) = -i$.

Soit $z \in \mathbb{C}$. On note $x = \mathrm{Re}(z)$ et $y = \mathrm{Im}(z)$.

<u>• si $f(i) = i$:</u>
Alors $f(z) = f(x + iy) = f(x) + f(iy) = f(x) + f(i) \times f(y)$ (propriétés des morphismes d'anneaux)
D'où $f(z) = x + iy = z$.

<u>• si $f(i) = -i$:</u>
Alors $f(z) = f(x) + f(i) \times f(y) = x - iy = \overline{z}$

Réciproquement, les applications $z \mapsto z$ et $z \mapsto \overline{z}$ sont des morphismes d'anneaux qui vérifient : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = x$.
