CORRECTION D'EXERCICES DU TD 11

1. **Exercice 3 :**

   Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \text{ ou } x = 1 \\ x & \text{si } x \in]0,1[\cap\mathbb{Q} \\ 1-x & \text{si } x \text{ est irrationnel} \end{cases}$

   f est bornée : $\forall x \in [0,1] \quad 0 < f(x) < 1$.

   Montrons que f n'admet pas d'extremum local.

   • supposons que $a \in]0,1[\cap\mathbb{Q}$.
   Pour tout $r > 0$, l'intervalle $]a-r,a[\cap[0,1]$ contient un nombre rationnel b.
   On a $f(b) < f(a)$: f ne présente pas un minimum local en a.
   Pour tout $r > 0$, l'intervalle $]a,a+r[\cap[0,1]$ contient un nombre rationnel b.
   On a $f(a) < f(b)$: f ne présente pas un maximum local en a.

   • supposons que a soit irrationnel.
   Pour tout $r > 0$, l'intervalle $]a-r,a[\cap[0,1]$ contient un nombre irrationnel b.
   On a $f(b) = 1-b > 1-a = f(a)$:f ne présente pas un maximum local en a.
   Pour tout $r > 0$, l'intervalle $]a,a+r[\cap[0,1]$ contient un nombre irrationnel b.
   On a $f(b) < f(a)$: f ne présente pas un minimum local en a.

   • Pour tout $r > 0$, l'intervalle $]0,r[\cap]0,\frac{1}{2}[$ contient un nombre rationnel b.
   $f(b) = b < \frac{1}{2} = f(0)$: f ne présente pas un minimum local en 0.
   Pour tout $r > 0$, l'intervalle $]0,r[\cap]0,\frac{1}{2}[$ contient un nombre irrationnel b.
   $f(b) = 1-b > \frac{1}{2} = f(0)$: f ne présente pas un maximum local en 0.

   • Un raisonnement analogue au précédent permet d'établir que f ne présente pas d'extremum local en 1.

2. **Exercice 6 :** on note :

$$f(x) = (a^x+b^x)^{1/x} = \exp\left(\frac{\ln(a^x+b^x)}{x}\right)$$

   On suppose que $a > b$:

$$f(x) = \exp\left(\frac{\ln(a^x) + \ln(1+\frac{b^x}{a^x})}{x}\right) = \exp\left(\ln(a) + \frac{\ln(1+\frac{b^x}{a^x})}{x}\right)$$

   Or comme $0 < \dfrac{b}{a} < 1$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{b}{a}\right)^x = 0$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \exp(\ln(a)) = a$

   Par symétrie des rôles joués par a et b, on obtient que si $b > a$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$.

   On suppose que $a = b$, on obtient alors $f(x) = (2a^x)^{1/x} = 2^{1/x}a \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} a$.

   $\boxed{\text{Ainsi, } \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \max(a,b)}$

3. **Exercice 7 c :**

   On pose : $u_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $f(u_n) = 2n\pi + \frac{\pi}{2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
   On pose : $v_n = 2n\pi - \frac{\pi}{2}$, alors $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $f(v_n) = -(2n\pi - \frac{\pi}{2}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

   Ainsi, f n'a pas de limite en $+\infty$.

4. **Exercice 8 :**

   Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $f(x+nT) = f(x)$, donc $f(x+nT) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$.

   D'autre part, $\left.\begin{array}{l} x+nT \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \\ \\ f(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} l \end{array}\right\}$ par composition des limites, on obtient $f(x+nT) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$

   L'unicité de la limite donne alors $f(x) = l$.
   Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = l$: f **est donc constante.**

5. **Exercice 10 :**

   Pour $\varepsilon = 1$, l'hypothèse assure l'existence de A tel que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,
   $$x \geq A \text{ et } y \geq A \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq 1$$
   On note $N = \max(\lfloor A \rfloor + 1{,}0)$.
   L'entier naturel N est donc supérieur à A, et pour tout entier $n \geq N$, on a $|f(n) - f(N)| \leq 1$.
   On obtient alors pour tout entier $n \geq N$: $|f(n)| = |f(n) - f(N) + f(N)|$
   $$\leq |f(n) - f(N)| + |f(N)|$$
   $$\leq 1 + |f(N)|.$$
   La suite $(f(n))_{n\geq 0}$ est donc une suite bornée : d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, elle admet une suite extraite $(f(\varphi(n)))_{n\geq 0}$ convergente (où φ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$).
   On note l la limite de cette suite extraite.
   Je vous laisse de soin de démontrer que f admet la limite l en $+\infty$.

6. **Exercice 31 :**

   Par l'absurde, on suppose qu'il existe une telle fonction.
   On suppose aussi que $f(0) \geq f(1)$.
   Soit r un nombre rationnel strictement supérieur à $f(0)$, et soit r' un nombre rationnel strictement inférieur à $f(1)$.
   On définit la fonction g par $g(x) = f(x) - r + (r - r')x$.
   g est continue sur $\mathbb{R}$.
   $g(0) = f(0) - r < 0$ et $g(1) = f(1) - r' > 0$.
   D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in]0,1[$ tel que $g(c) = 0$.
   Ce qui donne $f(c) = r + (r - r')c$.
   Si c est rationnel, alors $r + (r - r')c$ est rationnel, ce qui est contradictoire avec $f(c)$ est irrationnel.
   Donc c est irrationnel.
   Par conséquent, $f(c)$ est rationnel, ainsi que $f(c) - r$.
   Or $(r - r')c$ est le produit d'un rationnel non nul et d'un irrationnel est irrationnel.
   Contradiction.

   On adapte le raisonnement précédent lorsque $f(0) \leq f(1)$.

7. **Exercice 33 :**

   (a) En utilisant la relation au couple $(0,0)$, on obtient $2f(0) = 4f(0)$, c'est-à-dire $f(0) = 0$.

   En utilisant la relation au couple $(0,y)$, on obtient :
   $$\forall y \in \mathbb{R}, \qquad f(y) + f(-y) = 2\Big(f(0) + f(y)\Big)$$
   c'est-à-dire
   $$\forall y \in \mathbb{R}, \qquad f(-y) = f(y)$$
   La fonction f est donc paire.

   (b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Démontrons par une récurrence de pas double la proposition $\mathcal{P}_n$: $f(nx) = n^2 f(x)$.

   $\mathcal{P}_0$ et $\mathcal{P}_1$ sont vraies.

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}_{n-1}$ et $\mathcal{P}_n$ soient vraies.

En utilisant la relation fonctionnelle, on obtient

$$f\big((n+1)x\big) + f\big((n-1)x\big) = 2\Big(f(nx) + f(x)\Big)$$

puis $$f\big((n+1)x\big) = 2n^2 f(x) + 2f(x) - (n-1)^2 f(x)$$

c'est-à-dire $$f\big((n+1)x\big) = (n+1)^2 f(x)$$

$\boxed{\text{Ainsi, d'après le principe de récurrence, } \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad f(nx) = n^2 f(x)}$

Soit $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$.
On pose $m = -n$.
$f(nx) = f(-mx) = f(mx)$ par parité de f
Et $f(mx) = m^2 f(x)$ d'après ce qui précède.
Comme $m^2 = n^2$, on a ainsi, $f(nx) = n^2 f(x)$.

(c) Soit $r \in \mathbb{Q}$: il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $r = \dfrac{p}{q}$.

$f\big(\dfrac{p}{q}\big) = p^2 f\big(\dfrac{1}{q}\big)$.

On a également $f(1) = f\big(q \times \dfrac{1}{q}\big) = q^2 f\big(\dfrac{1}{q}\big)$, donc $f\big(\dfrac{1}{q}\big) = \dfrac{1}{q^2} f(1)$.

$\boxed{\text{Ainsi, } f(r) = f\big(\dfrac{p}{q}\big) = \dfrac{p^2}{q^2} f(1) = r^2 f(1)}$

(d) Notons $a = f(1)$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe une suite de rationnels $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers x.
$\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = x$ et f étant continue, $\lim\limits_{t\to x} f(t) = f(x)$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f(r_n) = f(x)$.

D'autre part, d'après la question c, $f(r_n) = ar_n^2$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f(r_n) = ax^2$.

L'unicité de la limite permet de déduire que $f(x) = ax^2$.

Réciproquement, pour tout réel a, la fonction $x \mapsto ax^2$ est continue sur $\mathbb{R}$ et vérifie l'équation fonctionnelle (calcul élémentaire).

Ainsi, les fonctions continues solutions de l'équation fonctionnnelle sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = ax^2$ (où $a \in \mathbb{R}$).

---

8. **Exercice 39 :**

a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction strictement croissante vérifiant : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x + f(y)) = f(x) + y$.
f est strictement croissante, donc injective.
Appliquée au couple $(0, 0)$, la relation donne : $f(0 + f(0)) = f(0)$.
L'injectivité de f permet de déduire que $f(0) = 0$.
Appliquée au couple $(0, x)$, la relation donne $f(f(x)) = x$.
Supposons que $f(x) > x$.
Comme f est strictement croissante, on a : $f(f(x)) > f(x)$, ce qui donne : $x > f(x)$. Contradiction.
On en déduit que $f(x) \leq x$.
Un raisonnement similaire permet d'établir également que $f(x) \geq x$.
Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = x$.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction strictement décroissante vérifiant : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x + f(y)) = f(x) + y$.
Comme précédemment, on montre que $f(0) = 0$, puis que $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(f(x)) = x$.
Appliquée au couple $(x, f(-x))$, la relation donne : $f(x + f(f(-x))) = f(x) + f(-x)$.
Comme $f(f(-x)) = -x$, on obtient que $0 = f(x) + f(-x)$, soit $f(-x) = -f(x)$.
Supposons que $f(x) > -x$.

Comme f est strictement décroissante, on a : $f(f(x)) < f(-x) = -f(x)$, ce qui donne : $x < -f(x)$ ou encore $-x > f(x)$. Contradiction.
On en déduit que $f(x) \leq -x$.
Un raisonnement similaire permet d'établir également que $f(x) \geq -x$.
Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = -x$.

Réciproquement, supposons que $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = x$.
Alors f est strictement croissante, et $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x + f(y)) = f(x + y) = x + y = f(x) + y$.
Supposons que $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = -x$.
Alors f est strictement décroissante, et $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x + f(y)) = f(x - y) = -x + y = f(x) + y$.

$\boxed{\text{Les solutions du problème sont les fonctions } x \mapsto x \text{ et } x \mapsto -x}$

b) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction strictement monotone vérifiant : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x + f(y)) = f(x) + y^n$.
f est strictement monotone, donc injective.
Appliquée au couple $(0, 0)$, la relation donne : $f(0 + f(0)) = f(0)$.
L'injectivité de f permet de déduire que $f(0) = 0$.
Appliquée au couple $(0, x)$, la relation donne $f(f(x)) = x^n$.
En particulier, $f(f(1)) = 1$.

Notons $a = f(1)$.
Alors $f(a) = f(f(1)) = 1$.
Par conséquent, $f(f(a)) = f(1) = a$.
D'autre part, $f(f(a)) = a^n$.
D'où $a^n = a$, ou encore, $a(a^{n-1} - 1) = 0$.
Or, comme f est injective, $f(1) \neq f(0)$, donc $a \neq 0$.
On en déduit que $a^{n-1} = 1$, donc $a = 1$ ou $a = -1$.

<u>si $a = 1$:</u>
Appliqué au couple $(1, 1)$, la relation fonctionnelle donne $f(2) = 2$.
D'une part, $f(f(2)) = f(2) = 2$.
D'autre part, $f(f(2)) = 2^n$. Ce qui est contradictoire, car $n > 1$.

<u>si $a = -1$:</u>
Alors $f(-1) = 1$.
D'où $f(f(-1)) = f(1) = -1$ et $f(f(-1)) = (-1)^n$.
n est donc impair.
Appliquée au couple $(1, -1)$, la relation fonctionnelle donne $f(2) = -2$.
Appliquée au couple $(-1, 1)$, la relation fonctionnelle donne $f(-2) = 2$.
$f(f(2)) = 2^n$ et $f(f(2)) = f(-2) = 2$.
Contradiction.

Ainsi, il n'existe pas de fonction f strictement monotone vérifiant : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x+f(y)) = f(x) + y^n$**.**

---

9. **Exercice 41 :**

Analyse : soit f une fonction solution.

Fixons $x \in \mathbb{R}$.

La fonction $g : y \mapsto f(x + y)$ est dérivable et $\forall y \in \mathbb{R} \quad g'(y) = f'(x + y)$.

On a aussi $g(y) = e^x f(y) + e^y f(x)$, donc $g'(y) = e^x f'(y) + e^y f(x)$.

Ainsi, on ontient $\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \qquad f'(x + y) = e^x f'(y) + e^y f(x) \quad (1)$

Pour $y = 0$, la relation (1) donne $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = f'(0)e^x + f(x)$.

Notons $a = f'(0)$.

f est donc solution de l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 (E) : $y' - y = ae^x$.

Les solutions de l'équation homogène associée sont les fonctions $x \mapsto Ce^x$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Cherchons une solution particulière y_P de (E) sous la forme $y_P(x) = C(x)e^x$.

On obtient : $C'(x)e^x = ae^x$, donc $C(x) = ax$ convient.

D'où les solutions de (E) sont les fonctions $x \mapsto Ce^x + axe^x$ avec $C \in \mathbb{R}$.

Or f est solution de (E), donc f est de la forme $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = Ce^x + axe^x$ (avec $C \in \mathbb{R}$).

De plus, $f'(0) = a$, ce qui impose que $C = 0$.

Ainsi, on a montré que si f est solution de (E), alors f est de la forme $f(x) = axe^x$ avec $a \in \mathbb{R}$.

Synthèse : réciproquement, on vérifie aisément que si f est de la forme $f(x) = axe^x$ avec $a \in \mathbb{R}$, alors f est dérivable et vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad f(x+y) = e^x f(y) + e^y f(x)$$

Conclusion : les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables vérifiant $\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad f(x+y) = e^x f(y) + e^y f(x)$ sont les fonctions $x \mapsto axe^x$ avec $a \in \mathbb{R}$