1. **Exercice 27 : généralisation du théorème de Rolle**

Si f est constante, alors $\forall x \in]a,+\infty[$, $f'(x) = 0$.

Supposons désormais f non constante.
Il existe donc $b \in]a,+\infty[$ tel que $f(a) \neq f(b)$.
Notons alors $k = \frac{f(a)+f(b)}{2}$: k est ainsi strictement compris entre $f(a)$ et $f(b)$.
D'après le théorème des valeurs intermédiaires (appliqué à f sur $[a,b]$), il existe $x_1 \in]a,b[$ tel que $f(x_1) = k$.
Toujours d'après le théorème des valeurs intermédiaires (appliqué cette fois-ci à f sur $[b,+\infty[$), il existe $x_2 \in]b,+\infty[$ tel que $f(x_2) = k$.
f est dérivable sur $[x_1,x_2]$ et $f(x_1) = f(x_2)$, donc d'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]x_1,x_2[$ tel que $f'(c) = 0$.

Autre solution :
On définit g sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ par :

$$\forall x \in [0,\frac{\pi}{2}[\quad g(x) = f(a+\tan(x)) \quad \text{et} \quad g(\frac{\pi}{2}) = f(a)$$

D'après les théorèmes généraux, g est continue sur $[0,\frac{\pi}{2}[$ et dérivable sur $]0,\frac{\pi}{2}[$.
De plus, $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} g(x) = f(a)$, donc g est continue en $\frac{\pi}{2}$.
Et $g(0) = g(\frac{\pi}{2})$.
Donc d'après le théorème de Rolle, il existe $d \in]0,\frac{\pi}{2}[$ tel que $g'(d) = 0$, ce qui donne :

$$f'(a+\tan(d)) \times (1+\tan^2(d)) = 0$$

En posant $c = a+\tan(d)$, on a bien : $c \in]a,+\infty[$ et $f'(c) = 0$.

2. **Exercice 29 : théorème de Darboux**

Puisque $f'(a) < 0$ et $f'(b) > 0$, la fonction f n'est pas strictement monotone.
f est continue sur $[a,b]$ (car f est dérivable sur $[a,b]$).
Or, on sait qu'une fonction continue et injective sur un intervalle est strictement monotone.
On en déduit que f n'est pas injective : il existe donc deux réels x_1 et x_2 distincts de $[a,b]$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$. En appliquant le théorème de Rolle entre ces deux points, on conclut qu'il existe un point c tel que $f'(c) = 0$.

Autre solution :
f est dérivable donc continue sur $[a,b]$. Elle admet donc un minimum m sur $[a,b]$ et on a :

$$\forall x \in [a,b] \quad f(x) \geq m$$

Si $f(a) = m$, on a alors, pour tout $x \in]a,b]$:

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{f(x)-m}{x-a} \geq 0$$

En faisant tendre x vers a, on obtient $f'(a) \geq 0$. Contradiction.
Si $f(b) = m$, on a alors, pour tout $x \in [a,b[$:

$$\frac{f(x)-f(b)}{x-b} = \frac{f(x)-m}{x-b} \leq 0$$

En faisant tendre x vers b, on obtient $f'(b) \leq 0$. Contradiction.

On en déduit que m est atteint en un point $c \in]a,b[$.
D'après le cours, $f'(c) = 0$.

3. **Exercice 35 :**

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et vérifiant :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(y)-f(x) = (y-x)f'\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

On a alors : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x+1)-f(x-1) = 2f'(x)$, donc $f'(x) = \frac{f(x+1)-f(x-1)}{2}$.

f' est donc une somme de fonctions dérivables donc est dérivable.
f est ainsi deux fois dérivable.
Par conséquent, f' est une somme de fonctions deux fois dérivables donc est deux fois dérivable.
f est ainsi trois fois dérivable.

On fixe $x \in \mathbb{R}$, et on dérive par rapport à la variable y la relation $f(y) - f(x) = (y-x)f'(\frac{x+y}{2})$.
On obtient : $\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad f'(y) = f'(\frac{x+y}{2}) + \frac{y-x}{2} f''(\frac{x+y}{2}) \quad (1)$.

On fixe ensuite $y \in \mathbb{R}$, et on dérive par rapport à la variable x la relation (1).
On obtient : $\forall y \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad 0 = \frac{1}{2} f''(\frac{x+y}{2}) - \frac{1}{2} f''(\frac{x+y}{2}) + \frac{y-x}{4} f'''(\frac{x+y}{2})$,
Donc $\forall y \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \frac{y-x}{4} f'''(\frac{x+y}{2}) = 0$.
On applique cette dernière relation aux points $x-1$ et $x+1$ et on obtient : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'''(x) = 0$.

$\boxed{\text{On en déduit qu'il existe } (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } f(x) = ax^2 + bx + c}$

Réciproquement, soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ où $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.
f est dérivable et

$$\begin{aligned} \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(y) - f(x) &= ay^2 + by - ax^2 - bx = a(y-x)(y+x) + b(y-x) \\ &= (y-x)(a(y+x)+b) = (y-x)f'\left(\frac{x+y}{2}\right) \end{aligned}$$

La réciproque est vraie.
