Exercice 25 c : factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $P = (1 - X^2)^3 + 8X^3$.

1. **Méthode 1 :** on utilise la formule $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$.
   On a : $P = (1 - X^2 + 2X)(\underbrace{(1-X^2)^2 - 2X(1-X^2) + 4X^2}_{=Q})$.

   Le polynôme $-X^2 + 2X + 1$ a pour discriminant $\Delta = 8$.
   Il a deux racines réelles : $\alpha_1 = 1 + \sqrt{2}$ et $\alpha_2 = 1 - \sqrt{2}$.
   Par conséquent, $-X^2 + 2X + 1 = -(X - 1 - \sqrt{2})(X - 1 + \sqrt{2})$.

   Il reste à factoriser le polynôme Q : $Q = X^4 + 2X^3 + 2X^2 - 2X + 1$.
   Afin d'utiliser les identités remarquables, on écrit $2X^2 = X^2 + X^2$.
   On obtient : $Q = (X^4 + 2X^3 + X^2) + (X^2 - 2X + 1)$
   $= (X^2 + X)^2 + (X-1)^2$
   $= (X^2 + X)^2 - i^2(X-1)^2$ *on utilise l'identité remarquable* $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$
   $= (X^2 + (1+i)X - i)\ (X^2 + (1-i)X + i)$.

   Déterminons les racines de $X^2 + (1+i)X - i$:
   Le discriminant vaut $\Delta = 2i + 4i = 6e^{i\pi/2} = (\sqrt{6}e^{i\pi/4})^2$.
   $\delta = \sqrt{6}e^{i\pi/4}$ est donc une racine carrée de Δ.
   Écrivons δ sous forme algébrique : $\delta = \sqrt{6} \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{3} + i\sqrt{3}$.

   Les racines de $X^2 + (1+i)X - i$ sont donc $\alpha_3 = \dfrac{\sqrt{3} - 1 + i(\sqrt{3}-1)}{2}$ et $\alpha_4 = -\dfrac{1 + \sqrt{3} + i(1+\sqrt{3})}{2}$
   Le polynôme Q étant à coefficients réels, $\overline{\alpha_3}$ et $\overline{\alpha_4}$ sont également des racines de Q.
   Q a ainsi 4 racines distinctes et est de degré 4. On en déduit sa factorisation dans $\mathbb{C}[X]$:

   $$Q = (X - \alpha_3)(X - \overline{\alpha_3})(X - \alpha_4)(X - \overline{\alpha_4})$$

   On note que $\alpha_3 = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2} \times (1+i)$, donc $|\alpha_3|^2 = \left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2 \times |1+i|^2 = \dfrac{4 - 2\sqrt{3}}{4} \times 2 = 2 - \sqrt{3}$.

   De même, $|\alpha_4|^2 = 2 + \sqrt{3}$.
   On obtient alors la factorisation de Q en produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$:

   $$Q = (X^2 - (\sqrt{3}-1)X + 2 - \sqrt{3})\ (X^2 + (1+\sqrt{3})X + 2 + \sqrt{3})$$

   $$\boxed{\text{Ainsi, } P = -(X - 1 - \sqrt{2})\ (X - 1 + \sqrt{2})\ (X^2 - (\sqrt{3}-1)X + 2 - \sqrt{3})\ (X^2 + (1+\sqrt{3})X + 2 + \sqrt{3})}$$

2. **Méthode 2 :** on cherche à déterminer les racines de P.
   On note que $P(0) = 1$, donc 0 n'est pas une racine de P.
   Soit $z \in \mathbb{C}^*$.
   $P(z) = 0 \iff (1 - z^2)^3 + 8z^3 = 0$
   $\iff (1 - z^2)^3 = (-2z)^3$
   $\iff \left(\dfrac{1 - z^2}{-2z}\right)^3 = 1$
   On rappelle que les solutions de l'équation $Z^3 = 1$ sont les racines cubiques de l'unité : 1, j et j^2.
   D'où $P(z) = 0 \iff \dfrac{1 - z^2}{-2z} = 1$ ou $\dfrac{1 - z^2}{-2z} = j$ ou $\dfrac{1 - z^2}{-2z} = j^2$
   $\iff -z^2 + 2z - 1 = 0$ ou $-z^2 + 2jz + 1 = 0$ ou $-z^2 + 2j^2z + 1 = 0$
   On détermine aisément les solutions de l'équation $-z^2 + 2z + 1 = 0$ et on obtient les nombres réels
   $\beta_1 = 1 + \sqrt{2}$ et $\beta_2 = 1 - \sqrt{2}$

   Le discriminant du trinôme $-z^2 + 2jz + 1$ est : $\Delta = 4j^2 + 4 = -4j$ (en utilisant la relation $1 + j + j^2 = 0$).
   On utilise les relations $-1 = e^{i\pi}$ et $j = e^{-2i\pi/3}$ pour obtenir une racine carrée de Δ :
   $\Delta = 4e^{-i\pi/3} = (2e^{-i\pi/6})^2$, donc $\delta = 2e^{-i\pi/6} = \sqrt{3} - i$ est une racine carrée de Δ.
   Les racines du trinôme $-z^2 + 2jz + 1$ sont les deux nombres complexes :
   $$\beta_3 = \frac{-1 - \sqrt{3} + i(\sqrt{3}+1)}{2} \text{ et } \beta_4 = \frac{-1 + \sqrt{3} + i(\sqrt{3}-1)}{2}$$
   β_3 et β_4 sont des racines de P. P étant à coefficients réels, $\overline{\beta_3}$ et $\overline{\beta_4}$ sont également des racines de P.

P a ainsi 6 racines distinctes et est de degré 6. On en déduit sa factorisation dans $\mathbb{C}[X]$:

$$P = -(X-\beta_1)(X-\beta_2)(X-\beta_3)(X-\overline{\beta_3})(X-\beta_4)(X-\overline{\beta_4})$$

On obtient la décomposition de P en produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ en utilisant les relations
$(X-\beta_3)(X-\overline{\beta_3}) = X^2 - 2\mathrm{Re}(\beta_3)X + |\beta_3|^2 = X^2 + (\sqrt{3}+1)X + 2 + \sqrt{3}$ (cf méthode 1 pour le détail du calcul)
$(X-\beta_4)(X-\overline{\beta_4}) = X^2 - 2\mathrm{Re}(\beta_4)X + |\beta_4|^2 = X^2 - (\sqrt{3}-1)X + 2 - \sqrt{3}$

$\boxed{\text{Ainsi, } P = -(X-1-\sqrt{2})\left(X-1+\sqrt{2}\right)\left(X^2-(\sqrt{3}-1)X+2-\sqrt{3}\right)\left(X^2+(1+\sqrt{3})X+2+\sqrt{3}\right)}$

Exercice 20 :

1. **Énoncé :**

   Déterminer $P \in \mathbb{R}_7[X]$ tel que $(X+1)^4$ divise $P-1$ et $(X-1)^4$ divise $P+1$.

2. **Analyse de l'énoncé :**

   • Il s'agit d'une question d'existence : exhiber un polynôme P de degré 7 qui vérifie les conditions requises.

   Il paraît néanmoins difficile d'expliciter directement un polynôme P, puis vérifier qu'il convient.

   • On procède généralement par analyse - synthèse :
   — l'analyse va permettre de déterminer l'expression d'un polynôme susceptible d'être solution du problème posé
   $$P \text{ solution} \Longrightarrow P \text{ est de la forme ....}$$
   — lors de la synthèse, on définit explicitement un polynôme P de degré 7 (trouvé lors de la phase analytique) puis on vérifie que $(X+1)^4$ divise $P-1$ et $(X-1)^4$ divise $P+1$.

   • Il est possible de procéder autrement que par analyse - synthèse (cf résolution 3).

3. **Résolution 1 (par les racines) :**

   • Soit $P \in \mathbb{R}_7[X]$ tel que $(X+1)^4$ divise $P-1$ et $(X-1)^4$ divise $P+1$.

   Il existe un polynôme Q tel que $P-1 = (X+1)^4 Q$.

   En évaluant en -1, on obtient $P(-1) = 1$.

   En dérivant, on a $P' = 4(X+1)^3 Q + (X+1)^4 Q' = (X+1)^3[4Q + (X+1)Q']$.

   Donc $(X+1)^3$ divise P'.

   On montre, de même, que la condition $(X-1)^4$ divise $P+1$ entraîne que $\begin{cases} P(1) = -1 \\ (X-1)^3 \text{ divise } P' \end{cases}$

   Ainsi, 1 et -1 sont des racines triples de P'.

   Comme $\deg(P') = 6$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que
   $$\begin{aligned} P' &= \lambda(X-1)^3(X+1)^3 \\ &= \lambda(X^2-1)^3 \\ &= \lambda(X^6 - 3X^4 + 3X^2 - 1) \end{aligned}$$

   Il existe donc $\mu \in \mathbb{R}$ tel que
   $$P = \lambda\left(\frac{X^7}{7} - \frac{3X^5}{5} + X^3 - X\right) + \mu$$

   Les conditions $\begin{cases} P(1) = -1 \\ P(-1) = 1 \end{cases}$ donne le système $\begin{cases} -\frac{16}{35}\lambda + \mu = -1 \\ \frac{16}{35}\lambda + \mu = 1 \end{cases}$

   On obtient $\mu = 0$ et $\lambda = \frac{35}{16}$ et ainsi
   $$P = \frac{1}{16}\left(5X^7 - 21X^5 + 35X^3 - 35X\right)$$

   • Réciproquement, on pose $P = \frac{1}{16}\left(5X^7 - 21X^5 + 35X^3 - 35X\right)$.

   On note $A = P-1$ et $B = P+1$.

   On vérifie que $A(-1) = A'(-1) = A''(-1) = A'''(-1) = 0$, donc $(X+1)^4$ divise $A = P-1$.

   Et $B(1) = B'(1) = B''(1) = B'''(1) = 0$, donc $(X-1)^4$ divise $B = P+1$.

4. **Résolution 2 (par les coefficients) :**

- Soit $P \in \mathbb{R}_7[X]$ tel que $(X+1)^4$ divise $P-1$ et $(X-1)^4$ divise $P+1$.

$(X+1)^4$ divise $A = P-1$, donc $A(-1) = A'(-1) = A''(-1) = A'''(-1) = 0$, ce qui donne $\begin{cases} P(-1) = 1 \\ P'(-1) = 0 \\ P''(-1) = 0 \\ P'''(-1) = 0 \end{cases}$

$(X-1)^4$ divise $B = P+1$, donc $B(1) = B'(1) = B''(1) = B'''(1) = 0$, ce qui donne $\begin{cases} P(1) = -1 \\ P'(1) = 0 \\ P''(1) = 0 \\ P'''(1) = 0 \end{cases}$

On note

$$P = \sum_{k=0}^{7} a_k X^k$$

On est amené à résoudre le système linéaire $\mathcal{S}$ à 8 inconnues et 8 équations :

$$\mathcal{S} \ : \ \begin{cases} -a_7 + a_6 - a_5 + a_4 - a_3 + a_2 - a_1 + a_0 & = & 1 \\ 7a_7 - 6a_6 + 5a_5 - 4a_4 + 3a_3 - 2a_2 + a_1 & = & 0 \\ -42a_7 + 30a_6 - 20a_5 + 12a_4 - 6a_3 + 2a_2 & = & 0 \\ 210a_7 - 120a_6 + 60a_5 - 24a_4 + 6a_3 & = & 0 \\ a_7 + a_6 + a_5 + a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0 & = & -1 \\ 7a_7 + 6a_6 + 5a_5 + 4a_4 + 3a_3 + 2a_2 + a_1 & = & 0 \\ 42a_7 + 30a_6 + 20a_5 + 12a_4 + 6a_3 + 2a_2 & = & 0 \\ 210a_7 + 120a_6 + 60a_5 + 24a_4 + 6a_3 & = & 0 \end{cases}$$

Le choix de déterminer P par ses coefficients n'est pas le plus approprié.

5. <u>**Résolution 3 (en utilisant l'algorithme d'Euclide) :**</u>

On remarque que si $P-1=(X+1)^4U$ *et* $P+1=(X-1)^4V$, *alors* $2=(X-1)^4V-(X+1)^4U$.

On va utiliser ***l'algorithme d'Euclide*** *pour déterminer deux polynômes* U *et* V *tels que*

$$2=(X-1)^4V-(X+1)^4U.$$

On note $A=(X+1)^4=X^4+4X^3+6X^2+4X+1$ et $B=(X-1)^4=X^4-4X^3+6X^2-4X+1$.

On a :

$A=B+8(X^3+X)$.

$B=(X^3+X)(X-4)+5X^2+1$

$X^3+X=\frac{X}{5}\times(5X^2+1)+\frac{4X}{5}$

$5X^2+1=\frac{25X}{4}\times\frac{4X}{5}+1$.

On "remonte" l'algorithme d'Euclide :

$$\begin{aligned}
1&=(5X^2+1)-\tfrac{25X}{4}\times[(X^3+X)-\tfrac{X}{5}(5X^2+1)]\\
&=-\tfrac{25X}{4}(X^3+X)+(5X^2+1)(\tfrac{5X^2}{4}+1)\\
&=-\tfrac{25X}{4}(X^3+X)+[B-(X^3+X)(X-4)]\times(\tfrac{5X^2}{4}+1)\\
&=[-\tfrac{5X^3}{4}+5X^2-\tfrac{29X}{4}+4]\times(X^3+X)+(\tfrac{5X^2}{4}+1)B\\
&=[-\tfrac{5X^3}{4}+5X^2-\tfrac{29X}{4}+4]\times(\tfrac{A}{8}-\tfrac{B}{8})+(\tfrac{5X^2}{4}+1)B
\end{aligned}$$

On obtient ainsi :

$$2=\underbrace{\left(\frac{5X^3}{16}+\frac{5X^2}{4}+\frac{29X}{16}+1\right)}_{=V}(X-1)^4-\underbrace{\left(\frac{5X^3}{16}-\frac{5X^2}{4}+\frac{29X}{16}-1\right)}_{=U}(X+1)^4$$

$\boxed{\text{On pose : } P=(X-1)^4V-1}$

Il reste à montrer que P convient :

Comme $\deg((X-1)^4)=4$ et $\deg(V)=3$, alors $\deg(P)=7$.

$P+1=(X-1)^4V$, donc $(X-1)^4$ divise $P+1$.

$P-1=(X-1)^4V-2=(X+1)^4U$, donc $(X+1)^4$ divise $P-1$.